Existence et stabilité de solutions fortes en théorie cinétique des gaz

Isabelle Tristani

Sous la direction de Stéphane Mischler

Soutenance de thèse - 22 Juin 2015

Description microscopique

Description des trajectoires de chaque particule

Equations de Newton

Description mésoscopique

Description de l'évolution de la densité de particules

Equations de Boltzmann, Landau, Fokker-Planck, Vlasov...

Description macroscopique

Description de l'évolution des observables (masse, vitesse, température)

Equations d'Euler, de Navier-Stokes

- Système décrit par l'évolution de la densité de particules $f = f(t, x, v)$, $t \in \mathbb{R}^+$ le temps, $x \in \Omega$ la position et $v \in \mathbb{R}^3$ la vitesse.
- Absence de force extérieure et d'interaction entre particules : équation de transport libre

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = 0.$$

- Si interaction entre particules, équation de la forme

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = Q(f).$$

Equation de Boltzmann

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = Q_B(f, f)$$

- Collisions élastiques : (v, v_*) et (v', v'_*) vitesses d'un couple de particules avant et après collision

$$v + v_* = v' + v'_*, \quad |v|^2 + |v_*|^2 = |v'|^2 + |v'_*|^2.$$

- Collisions microréversibles.
- Propriétés de conservation :

$$\int_{\mathbb{R}^3} Q_B(f, f)\, \varphi(v)\, dv = 0 \quad \text{pour} \quad \varphi(v) = 1, v_1, v_2, v_3, |v|^2.$$

- Dissipation d'entropie :

$$D(f) := -\int_{\mathbb{R}^3} Q_B(f, f) \log(f)\, dv \geq 0.$$

Soit f_t une solution de l'équation de Boltzmann.

- Propriétés de conservation :

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{T}^3} f_t(x,v)\,\varphi(v)\,dx\,dv = 0, \quad \varphi(v) = 1, v_1, v_2, v_3, |v|^2.$$

- Théorème H de Boltzmann :

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{T}^3} f_t(x,v)\,\log f_t(x,v)\,dx\,dv \leq 0.$$

$\hookrightarrow f_t \xrightarrow[t\to\infty]{} \mu$ où μ est une Maxwellienne.

- Problème de Cauchy : solutions homogènes, solutions proches du vide, solutions renormalisées, solutions perturbatives...
- Comportement en temps grand des solutions : méthodes d'entropie, étude spectrale de l'opérateur linéarisé autour de l'équilibre...

- Etude du problème linéaire ou linéarisé autour de l'équilibre :
  $\hookrightarrow$ Problème linéaire : $\partial_t f = \Lambda f$.
  (1) Argument d'élargissement de l'espace dans lequel on a un trou spectral : on sait que Λ admet un trou spectral dans E, par exemple $E = L^2(\mu^{-1/2})$, on montre que Λ admet un trou spectral dans $\mathcal{E} \supset E$, par exemple $\mathcal{E} = L^1(\langle v \rangle^k)$.
  (2) Argument perturbatif : $\Lambda = \Lambda_\varepsilon$ et $\Lambda_\varepsilon \to \Lambda_0$, on sait que Λ_0 admet un trou spectral, on montre que pour ε assez petit, Λ_ε admet aussi un trou spectral dans le même espace.
- Retour au problème non linéaire : existence d'un voisinage dans lequel la partie linéaire est dominante.

Découpage classique (Hilbert, Weyl...) :

$$\Lambda = \underbrace{\mathcal{A}_0}_{\text{compact}} + \underbrace{\mathcal{B}_0}_{\text{dissipatif}} .$$

Décomposition de $\mathcal{A}_0$: $\mathcal{A}_0 = \underbrace{\mathcal{A}}_{\text{régulier}} + \underbrace{\mathcal{A}^c}_{\text{petit}}$.

Nouveau découpage :

$$\Lambda = \mathcal{A} + (\mathcal{A}^c + \mathcal{B}_0) =: \underbrace{\mathcal{A}}_{\text{régulier}} + \underbrace{\mathcal{B}}_{\text{dissipatif}} .$$

$\hookrightarrow$ Estimations quantitatives.

- (1) Equation de Fokker-Planck fractionnaire : retour exponentiel vers l'équilibre dans $L^1(\langle x\rangle^k)$.
- (1) Equation de Boltzmann sans troncature angulaire pour des potentiels durs homogène en espace : retour exponentiel vers l'équilibre dans $L^1(\langle v\rangle^k)$.
- (1) Equation de Landau non homogène en espace pour des potentiels faiblement mous, maxwelliens et durs : théorie de Cauchy et retour exponentiel vers l'équilibre dans $H^3_x L^2_v(m)$.
- (2) Equation de Boltzmann inélastique : théorie de Cauchy et retour exponentiel vers l'équilibre des solutions dans $W^{s,1}_x W^{2,1}_v(m)$.
- (1)+(2) Equations de Fokker-Planck discrète, fractionnaire et classique : retour exponentiel vers l'équilibre uniforme.

Equation de Fokker-Planck

$$\partial_t f = \Lambda_\varepsilon f := \mathcal{D}_\varepsilon f + \mathrm{div}(xf), \quad \varepsilon \geq 0.$$

- FP discret : $\mathcal{D}_\varepsilon(f) := \frac{1}{\varepsilon^2}(k_\varepsilon * f - f), \quad \varepsilon > 0.$
- FP fractionnaire : $\varepsilon > 0$

$$\mathcal{D}_\varepsilon(f)(x) := c_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(y) - f(x) - \chi(x-y)(y-x)\cdot\nabla f(x)}{|x-y|^{d+2-\varepsilon}}\, dy.$$

- FP classique : $\mathcal{D}_0 f = \Delta f.$

On a : $\Lambda_\varepsilon \to \Lambda_0$.

$\hookrightarrow$ Peut-on traiter ces familles d'équations dans un même cadre uniforme en ε ?

Théorème (Mischler-T.)

Il existe $\varepsilon_0 \in (0,2)$, $a < 0$ *et* $C \geq 1$ *tels que :*
$\forall\, t \geq 0,\ \forall\, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0],\ \forall\, f \in X,$

$$\|S_{\Lambda_\varepsilon}(t) f - \langle f \rangle\, G_\varepsilon\|_X \leq C\, e^{at}\, \|f - \langle f \rangle\, G_\varepsilon\|_X$$

où X *est par exemple un espace* L^1 *à poids,* $S_{\Lambda_\varepsilon}(t) = e^{\Lambda_\varepsilon t}$ *est le semi-groupe associé au générateur* Λ_ε, G_ε *l'équilibre de l'équation et* $\langle f \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f$.

Equation de Fokker-Planck discrète

$$\partial_t f = \frac{1}{\varepsilon^2}(k_\varepsilon * f - f) + \mathrm{div}(xf) = \Lambda_\varepsilon f$$

avec $k \in W^{2,1}(\mathbb{R}^d) \cap L^1_{2q+3}$ qui vérifie

$$\int_{\mathbb{R}^d} k(x) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x \otimes x \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2I_d \end{pmatrix},$$

$$k \geq \kappa \, \mathbf{1}_{B(0,r)} \quad \text{pour} \quad \kappa, r > 0.$$

et

$$k_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^d} k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

$\hookrightarrow$ Peut-on utiliser un argument perturbatif pour cette équation uniformément en ε ?

- Λ_ε famille d'opérateurs tels que $\Lambda_\varepsilon = \mathcal{A}_\varepsilon + \mathcal{B}_\varepsilon$.
  $X_1 \subset X_0 \subset X_{-1}$ trois espaces de Banach.
- Il existe $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que

(A1) Localisation du spectre de Λ_0. Dans X_0 et X_1, on a :

$$\Sigma(\Lambda_0) \cap \Delta_a = \{0\} \subset \Sigma_d(\Lambda_0).$$

(A2) Dissipativité de $\mathcal{B}_\varepsilon$ et caractère borné de $\mathcal{A}_\varepsilon$.
Pour tout $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $\mathcal{B}_\varepsilon - a$ est hypodissipatif dans X_j et $\mathcal{A}_\varepsilon \in \mathscr{B}(X_j)$ pour $j = -1, 0, 1$.

(A3) Propriétés régularisantes de $T_n(t) := (\mathcal{A}_\varepsilon\, S_{\mathcal{B}_\varepsilon}(t))^{(*n)}$.
Pour tout $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, T_n satisfait pour $j = -1, 0$.

$$\int_0^\infty \| T_n(t) \|_{\mathscr{B}(X_j, X_{j+1})}\, e^{-at}\, dt \leq C_{a,n}.$$

(A4) Estimation sur $\Lambda_\varepsilon - \Lambda_0$. Pour $j = 0, 1$,

$$\|\mathcal{A}_\varepsilon - \mathcal{A}_0\|_{\mathscr{B}(X_j, X_{j-1})} + \|\mathcal{B}_\varepsilon - \mathcal{B}_0\|_{\mathscr{B}(X_j, X_{j-1})} \leq \eta_1(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 1]{} 0.$$

Théorème (Mischler-Mouhot; T.)

Sous les hypothèses précédentes, il existe $\varepsilon' \in (0, \varepsilon_0]$ *et* $\eta_2(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$ *tels que, pour tout* $\varepsilon \in (0, \varepsilon']$,

$$\begin{aligned}
&\Sigma(\Lambda_\varepsilon) \cap \Delta_a = \{\xi_1^\varepsilon, \dots, \xi_k^\varepsilon\} \subset \Sigma_d(\Lambda_\varepsilon);\\
&\forall\, 1 \le j \le k, \quad |\xi_j^\varepsilon| \le \eta_2(\varepsilon);\\
&\dim \mathrm{R}(\Pi_{\Lambda_\varepsilon, \xi_1^\varepsilon} + \dots + \Pi_{\Lambda_\varepsilon, \xi_k^\varepsilon}) = \dim \mathrm{R}(\Pi_{\Lambda_0, 0}).
\end{aligned}$$

De plus, pour tout $a' \in (a, \infty) \setminus \{\Re e\, \xi_1^\varepsilon, \dots, \Re e\, \xi_k^\varepsilon\}$, *on a :*

$$\forall\, t \ge 0, \quad \left\| S_{\Lambda_\varepsilon}(t) - \sum_{j=1}^{k} S_{\Lambda_\varepsilon}(t) \Pi_{\Lambda_\varepsilon, \xi_j^\varepsilon} \right\|_{\mathscr{B}(X_0)} \le C_{a'}\, e^{a' t}.$$

- Espaces considérés : $m(x) = \langle x \rangle^q, \quad q > d/2 + 6$

$$X_1 := H^6(m) \subset X_0 := H^3(m) \subset X_{-1} := L^2(m).$$

- Soient $\chi_R \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\mathbb{1}_{B(0,R)} \leq \chi \leq \mathbb{1}_{B(0,2R)}$ et $\chi_R^c := 1 - \chi_R$.
- Pour $\varepsilon > 0$, on définit

$$\mathcal{A}_\varepsilon f := M \chi_R \left(k_\varepsilon * f\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_\varepsilon f := \Lambda_\varepsilon f - \mathcal{A}_\varepsilon f.$$

- Pour $\varepsilon = 0$, on définit

$$\mathcal{A}_0 f := M \chi_R f \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_0 f := \Lambda_0 f - \mathcal{A}_0 f.$$

Théorème

Soit $i \in \{-1, 0, 1\}$. Il existe $a_0 < 0$ tel que pour tout $f \in X_i$ et pour tout $a > a_0$,

$$\|S_{\Lambda_0}(t)f - G_0\langle f\rangle\|_{X_i} \leq C_a\, e^{at}\, \|f - G_0\langle f\rangle\|_{X_i}, \quad \forall\, t \geq 0$$

où G_0 est l'unique équilibre de l'équation de masse 1.

$\hookrightarrow$ Poincaré et condition de Lyapunov : ... école de Toulouse 2000'
$\hookrightarrow$ Sobolev logarithmique : Gross, Stroock 80' ...
$\hookrightarrow$ Elargissement : Gualdani-Mischler-Mouhot 2013, Mischler-Mouhot 2014

$\hookrightarrow$ (A1) est réalisée.

- $\mathcal{A}_\varepsilon$ est borné dans X_i, $i = -1, 0, 1$ uniformément en ε.
- Soit $a > d/2 - q + 6$. Il existe $\varepsilon_0 > 0$, $M \geq 0$ et $R \geq 0$ tels que pour tout $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $\mathcal{B}_\varepsilon - a$ est hypodissipatif dans X_i, $i = -1, 0, 1$ avec a qui ne dépend pas de ε.

Exemple de calculs dans $L^2(m)$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}_\varepsilon f &= \frac{1}{\varepsilon^2}(k_\varepsilon * f - f) + \mathrm{div}(xf) - M\,\chi_R\,(k_\varepsilon * f) \\
&= \left(\frac{1}{\varepsilon^2} - M\right)(k_\varepsilon * f - f) + M\,\chi_R^c\,(k_\varepsilon * f - f) + \mathrm{div}(xf) - M\,\chi_R\,f.
\end{aligned}
$$

Estimation de $\int_{\mathbb{R}^d} (\mathcal{B}_\varepsilon f)\, f\, m^2$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} (\mathcal{B}_\varepsilon f)\, f\, m^2 = \left(\frac{1}{\varepsilon^2} - M\right) \int_{\mathbb{R}^d} (k_\varepsilon * f - f)\, f\, m^2 \\ + \int_{\mathbb{R}^d} M\, \chi_R^c\, (k_\varepsilon * f - f)\, f\, m^2 \\ + \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{div}(xf)\, f\, m^2 - \int_{\mathbb{R}^d} M\, \chi_R\, f^2\, m^2 \\ =: T_1 + T_2 + T_3 + T_4.\end{aligned}$$

On a les estimations suivantes :

$$T_1 \leq \text{terme négatif} + C \int_{\mathbb{R}^d} f^2(x)\, m^2(x)\, \frac{1}{\langle x \rangle^2}\, dx$$

$$T_2 \leq M\, C_R\, \kappa_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} f^2\, m^2, \quad \kappa_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

$$T_3 + T_4 = \int_{\mathbb{R}^d} f^2(x)\, m^2(x) \left(\frac{d}{2} - \frac{q\, |x|^2}{\langle x \rangle^2} - M\, \chi_R(x) \right) dx$$

On obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\mathcal{B}_\varepsilon f)\, f\, m^2$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} f^2\, m^2 \Big(\underbrace{C\,\langle x\rangle^{-2} + \frac{d}{2} - \frac{q\,|x|^2}{\langle x\rangle^2} + M\, C_R\, \kappa_\varepsilon}_{\xrightarrow[\varepsilon\to 0,\,|x|\to\infty]{} d/2-q<0} - M\,\chi_R \Big)$$

Pour $a > d/2 - q$, on peut donc trouver M, R et ε_0 tels que pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\mathcal{B}_\varepsilon - a) f\, f\, m^2 \leq 0.$$

$\hookrightarrow$ (A2) est réalisée.

On montre qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\int_0^\infty \| \, (\mathcal{A}_\varepsilon S_{\mathcal{B}_\varepsilon})^{(*n)}(t)\|_{L^2(m)\to H^1(m)} \, e^{-at} \, dt \le C_a.$$

On considère f_t solution de

$$\partial_t f_t = \mathcal{B}_\varepsilon f_t, \quad f_0 = f.$$

On a, si $\varepsilon_0 > 0$ est assez petit, pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|f_t\|^2_{L^2(m)} &= \int_{\mathbb{R}^d} (\mathcal{B}_\varepsilon f_t)\, f_t \, m^2 \\ &\le \underbrace{-\frac{1}{4\varepsilon^2}\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} (f_t(y) - f_t(x))^2 \; k_\varepsilon(x-y)\, dy\, dx}_{\text{gain de régularité}} + a\,\|f_t\|^2_{L^2(m)}\end{aligned}$$

De plus, on peut montrer que :

$$\|k_\varepsilon *_x f\|^2_{\dot{H}^1} \leq \frac{K}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} (f(y) - f(x))^2 \; k_\varepsilon(x-y)\, dy\, dx.$$

On en déduit que :

$$\int_0^t \|k_\varepsilon *_x f_s\|^2_{\dot{H}^1} e^{-2as}\, ds \leq -\frac{1}{2a} \|f\|^2_{L^2(m)}, \quad \forall\, t \geq 0,$$

puis que

$$\int_0^\infty \|\mathcal{A}_\varepsilon S_{\mathcal{B}_\varepsilon}(s) f\|_{H^1(m)}\, e^{-as/2}\, ds \leq C\, \|f\|_{L^2(m)}.$$

$\hookrightarrow$ (A3) est réalisée.

On montre que :

$$\|\mathcal{A}_\varepsilon - \mathcal{A}_0\|_{\mathscr{B}(X_i,X_{i-1})} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \|\Lambda_\varepsilon - \Lambda_0\|_{\mathscr{B}(X_i,X_{i-1})} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

On a :

$$\mathcal{A}_\varepsilon f - \mathcal{A}_0 f = M\,\chi_R\big(k_\varepsilon * f - f\big) \quad \text{et} \quad \Lambda_\varepsilon - \Lambda_0 = \mathcal{D}_\varepsilon - \Delta.$$

Développement de Taylor pour traiter $\mathcal{D}_\varepsilon - \Delta$.

$\hookrightarrow$ (A4) est réalisée.

- En appliquant le théorème de perturbation, on obtient l'existence de $a < 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que pour tout $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, pour tout $f \in X_0 = H^3(\langle x \rangle^q)$:

$$\|S_{\Lambda_\varepsilon}(t)f - \Pi_{\Lambda_\varepsilon,0} S_{\Lambda_\varepsilon}(t) f\|_{X_0} \leq C\, e^{at}\, \|f - \Pi_{\Lambda_\varepsilon,0} f\|_{X_0}, \quad \forall\, t \geq 0$$

- Théorie de Krein-Rutman : il existe un unique état d'équilibre G_ε de masse 1 tel que $\Lambda_\varepsilon G_\varepsilon = 0$ et $\Pi_{\Lambda_\varepsilon,0} f = G_\varepsilon \langle f \rangle$. On en déduit le résultat :

$$\|S_{\Lambda_\varepsilon}(t)f - \langle f \rangle\, G_\varepsilon\|_{X_0} \leq C\, e^{at} \|f - \langle f \rangle\, G_\varepsilon\|_{X_0}, \quad \forall\, t \geq 0.$$

$\hookrightarrow$ Peut-on utiliser un argument d'élargissement pour étendre ce résultat à l'espace $L^1(\langle x \rangle^q)$?

- E et $\mathcal{E}$ sont deux espaces de Banach tels que $E \subset \mathcal{E}$
  $L \in \mathscr{C}(E)$ et $\mathcal{L} \in \mathscr{C}(\mathcal{E})$ tels que $\mathcal{L}_{|E} = L$
  $\mathcal{L} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ et $L = A + B$ avec $\mathcal{A}_{|E} = A$ et $\mathcal{B}_{|E} = B$.
- On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ tels que

(H1) Localisation du spectre de L :

$$\Sigma(L) \cap \Delta_a = \{0\} \subset \Sigma_d(L)$$

et $L - a$ est dissipatif sur $\mathrm{R}(Id - \Pi_{L,0})$.

(H2) Dissipativité de $\mathcal{B}$ et caractère borné de $\mathcal{A}$:
$(\mathcal{B} - a)$ est hypodissipatif dans $\mathcal{E}$ et $\mathcal{A} \in \mathscr{B}(\mathcal{E})$, $A \in \mathscr{B}(E)$.

(H3) Propriétés régularisantes de $T_n(t) := (\mathcal{A}S_{\mathcal{B}}(t))^{(*n)}$:

$$\int_0^\infty \| T_n(t) \|_{\mathscr{B}(\mathcal{E},E)} \, e^{-at} \, dt \leq C_{a,n}.$$

Théorème (Gualdani-Mischler-Mouhot)

Pour tout $a' > a$, on a l'estimation suivante :

$$\forall\, t \geq 0, \quad \left\| S_{\mathcal{L}}(t) - S_{\mathcal{L}}(t)\Pi_{\mathcal{L},0} \right\|_{\mathscr{B}(\mathcal{E})} \leq C_{a'} \, e^{a' t}.$$

On applique le théorème avec $E = H^3(m)$ et $\mathcal{E} = L^1(m)$. On utilise le même découpage.

- (H1) est réalisée grâce au résultat précédent.
- On montre que (H2) est vérifiée de la même manière que (A2) l'est.
- Pour (H3), on procède par dualité. On montre que pour tout $s \in \mathbb{N}$ (en particulier pour $s > d/2$), il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$(\mathcal{A}_\varepsilon^* S_{\mathcal{B}_\varepsilon^*}(t))^{(*n)} : L^2 \to H^s$$

et donc

$$(S_{\mathcal{B}_\varepsilon}(t)\mathcal{A}_\varepsilon)^{(*n)} : H^{-s} \to L^2.$$

On utilise ensuite l'injection de Sobolev $L^1 \hookrightarrow H^{-s}$ pour $s > d/2$ pour conclure que

$$(\mathcal{A}_\varepsilon S_{\mathcal{B}_\varepsilon}(t))^{(*(n+1))} : L^1 \to L^2.$$

Théorème (Mischler-T.)

Il existe $\varepsilon_0 \in (0,2)$, $a < 0$ *et* $C \geq 1$ *tels que :*
$\forall\, t \geq 0,\ \forall\, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0],\ \forall\, f \in X$ *:*

$$\|S_{\Lambda_\varepsilon}(t) f - G_\varepsilon \langle f \rangle\|_X \leq C\, e^{at}\, \|f - G_\varepsilon \langle f \rangle\|_X$$

où $X = L^1(\langle x \rangle^q)$, $q > d/2 + 6$, $S_{\Lambda_\varepsilon}(t) = e^{\Lambda_\varepsilon t}$ *est le semi-groupe associé au générateur* Λ_ε *et* G_ε *l'unique équilibre de l'équation de masse* 1.

Equation de Boltzmann sans cut-off pour des potentiels durs

$$\partial_t f(t,v) = Q(f,f)(t,v), \quad v \in \mathbb{R}^3, \quad t \geq 0.$$

- Opérateur de collision de Boltzmann :

$$Q(g,f) := \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2} B(v-v_*,\sigma)\left[g(v'_*)f(v') - g(v_*)f(v)\right]\, d\sigma\, dv_*.$$

- Particules qui interagissent selon un potentiel répulsif de la forme $\phi(r) = r^{-(p-1)}$, $p > 5 \leftrightarrow$ potentiels durs.
- $B(v-v_*,\sigma) = C|v-v_*|^\gamma\, b(\cos\theta)$ non intégrable sur $\mathbb{S}^2$ avec

$$\gamma = \frac{p-5}{p-1} > 0 \quad \text{et} \quad \underbrace{\sin\theta\, b(\cos\theta) \approx \theta^{-1-2s}}_{\text{singularité en 0 non intégrable}}, \quad s = \frac{1}{p-1}.$$

- $\mu(v) = (2\pi)^{-3/2} e^{-|v|^2/2}$ unique équilibre de masse 1, moment nul et énergie 3.

Théorème (T.)

Soit $f_0 \geq 0$ *d'entropie finie et satisfaisant*

$$\int_{\mathbb{R}^3} f_0(v)\, dv = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^3} f_0(v)\, v\, dv = 0, \quad \int_{\mathbb{R}^3} f_0(v)\, |v|^2\, dv = 3,$$

alors si f_t *est une solution "lisse" associée à la donnée initiale* f_0*, il existe des constantes* $\lambda > 0$ *et* $C > 0$ *telles que*

$$\forall\, t \geq 0, \quad \|f_t - \mu\|_{L^1} \leq C\, e^{-\lambda\, t}$$

où μ *est l'équilibre de l'équation de même masse, quantité de mouvement et énergie que* f_0*.*

$\hookrightarrow$ Amélioration du taux polynomial de convergence de Villani 2003.
$\hookrightarrow$ Amélioration du résultat de Mouhot 2006 (cas cut-off).

Linéarisation autour de l'équilibre : $f = \mu + h$

$$\partial_t h = \underbrace{Q(\mu, h) + Q(h, \mu)}_{\mathcal{L}h} + Q(h, h).$$

$\hookrightarrow$ Peut-on utiliser l'argument d'élargissement avec $\mathcal{L}$?

- Séparation des collisions rasantes et non rasantes :

$$\mathcal{L} = \underbrace{\mathcal{L}_\delta}_{\theta \leq \delta} + \underbrace{\mathcal{L}_\delta^c}_{\theta \geq \delta}.$$

- Découpage de la partie cut-off :

$$\mathcal{L}_\delta^c = \underbrace{\mathcal{A}_{\delta,\varepsilon}^c}_{\text{régulier}} + \underbrace{\mathcal{B}_{\delta,\varepsilon}^c}_{\text{petit}} \underbrace{-\nu_\delta}_{\text{dissipatif}}$$

$$\mathcal{A}_{\delta,\varepsilon}^c(h) := \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} \Theta_\varepsilon [\mu'_* \, h' + \mu' \, h'_* - \mu \, h_*] \; b_\delta^c(\cos\theta) |v - v_*|^\gamma \, d\sigma \, dv_*$$
$$\mathcal{B}_{\delta,\varepsilon}^c(h) := \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} (1 - \Theta_\varepsilon) [\mu'_* \, h' + \mu' \, h'_* - \mu \, h_*] \; b_\delta^c(\cos\theta) |v - v_*|^\gamma \, d\sigma \, dv_*$$
$$\nu_\delta(v) = \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} \mu_* \, b_\delta^c(\cos\theta) |v - v_*|^\gamma \, d\sigma \, dv_* \geq K_\delta \langle v \rangle^\gamma, \quad K_\delta \xrightarrow[\delta \to 0]{} +\infty.$$

Utilisation du théorème d'élargissement avec

$$E = L^2(\mu^{-1/2}) \quad \text{et} \quad \mathcal{E} = L^1(\langle v \rangle^k)$$

$$\mathcal{A} := \mathcal{A}^c_{\delta,\varepsilon} \quad \text{et} \quad \mathcal{B} := \mathcal{L}_\delta + \mathcal{B}^c_{\delta,\varepsilon} - \nu_\delta.$$

Théorème (T.)

Soit $k > 2$. Il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour tout $\lambda \in (0, \lambda_0)$, il existe $C_\lambda > 0$ tel que pour tout $h \in L^1(\langle v \rangle^k)$, on a :

$$\forall\, t \geq 0, \quad \|S_{\mathcal{L}}(t)h - \Pi_{\mathcal{L},0}h\|_{L^1(\langle v \rangle^k)} \leq C_\lambda\, e^{-\lambda t} \|h - \Pi_{\mathcal{L},0}h\|_{L^1(\langle v \rangle^k)}.$$

$\hookrightarrow$ Théorie de Cauchy pour l'équation non linéaire dans un espace L^1 à poids polynomial.

$\hookrightarrow$ Ce théorème nous permet de relier les théories linéarisée et non linéaire.

Perturbation d'une solution f_t autour de l'équilibre : $f_t = \mu + h_t$, $\Pi_{\mathcal{L},0} h_t = 0$. h_t vérifie

$$\partial_t h_t = \mathcal{L} h_t + Q(h_t, h_t).$$

On veut montrer que h_t converge vers 0 avec un taux exponentiel. Stratégie de la preuve :

- Utiliser la convergence polynomiale pour les temps petits.
- Une fois que f_t entre dans un voisinage de stabilité de μ, la partie linéaire est dominante, inéquation différentielle de la forme

$$\frac{d}{dt} u_t \leq -u_t + u_t^2 \quad \text{où} \quad u_t = \|h_t\|.$$

- Utiliser la convergence exponentielle vers l'équilibre obtenue dans $L^1(\langle v \rangle^k)$ pour la partie linéaire.

Théorème (T.)

Soit $f_0 \geq 0$ d'entropie finie et satisfaisant

$$\int_{\mathbb{R}^3} f_0(v)\,dv = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^3} f_0(v)\,v\,dv = 0, \quad \int_{\mathbb{R}^3} f_0(v)\,|v|^2\,dv = 3,$$

alors si f_t est une solution "lisse" associée à la donnée initiale f_0, il existe des constantes $\lambda > 0$ et $C > 0$ telles que

$$\forall\, t \geq 0, \quad \|f_t - \mu\|_{L^1} \leq C\, e^{-\lambda\, t}$$

où μ est l'équilibre de l'équation de même masse, quantité de mouvement et énergie que f_0.

Equation de Boltzmann inélastique pour des sphères dures :

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = Q_\alpha(f,f) + (1-\alpha)\,\Delta_v f.$$

- $Q_\alpha(f,f)$ opérateur de collision avec coefficient d'inélasticité $\alpha \in [0,1)$ ($\alpha = 1 \leftrightarrow$ collisions élastiques)
- Conservation de la quantité de mouvement mais pas de l'énergie :

$$v + v_* = v' + v'_* \quad \text{et} \quad |v'|^2 + |v'_*|^2 - |v|^2 - |v_*|^2 < 0.$$

$\hookrightarrow$ Pas de théorème H.

$\hookrightarrow$ Pas de théorie à la DiPerna-Lions.

Théorème (T.)

Soit $X_0 := W_v^{2,1} W_x^{s,1}\left(\langle v\rangle e^{a\langle v\rangle^\beta}\right)$ *avec* $a > 0$ *et* $\beta \in (0,1)$. *Pour* α *assez proche de* 1, *il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que pour toute donnée initiale* $f_{in} \in X_0$ *vérifiant*

$$\|f_{in} - G_\alpha\|_{X_0} \leq \varepsilon,$$

où G_α *est l'équilibre de l'équation de même masse et moment que* f_{in}, *il existe une solution globale unique* $f \in L^\infty_t(X_0)$. *De plus, il existe* $\lambda_\alpha > 0$ *tel que*

$$\forall\, t \geq 0, \quad \|f(t) - G_\alpha\|_{X_0} \leq C e^{-\lambda_\alpha t}\|f_{in} - G_\alpha\|_{X_0}, \ C \geq 1.$$

$\hookrightarrow$ Extension possible au cas des solutions faiblement non homogènes.

$\hookrightarrow$ Premier résultat d'existence dans un "régime collisionnel".

Equation stationnaire :

$$Q_\alpha(f,f) + (1-\alpha)\,\Delta_v f = 0.$$

- Existence d'états stationnaires pour tout $\alpha \in (0,1)$.
- Unicité d'états stationnaires de masse et quantité de mouvement fixés pour α assez proche de 1 $\to$ G_α unique équilibre de masse 1 et de moment nul pour $\alpha \in [\alpha_*, 1]$.
- Les états stationnaires G_α, $\alpha < 1$ satisfont

$$G_\alpha(v) \approx e^{-|v|^{3/2}}$$

$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} G_\alpha e^{|v|^2} = \infty$, $G_\alpha \notin L^1(e^{|\cdot|^2})$.

$\hookrightarrow$ On ne peut pas envisager un argument perturbatif autour de l'élastique dans des espaces de type $L^2(\mu^{-1/2})$.

Linéarisation autour de l'équilibre : $f = G_\alpha + h$

$$\partial_t h = \underbrace{Q_\alpha(G_\alpha, h) + Q_\alpha(h, G_\alpha) + (1-\alpha)\,\Delta_v h - v\cdot\nabla_x h}_{\hat{Q}_\alpha(h) + (1-\alpha)\,\Delta_v h - v\cdot\nabla_x h =: \mathcal{L}_\alpha h} + Q(h,h).$$

$\hookrightarrow$ Peut-on utiliser l'argument perturbatif avec $\mathcal{L}_\alpha$?

- Introduire la différence entre inélastique et élastique $\hat{Q}_\alpha - \hat{Q}_1$:

$$\mathcal{L}_\alpha = \underbrace{\hat{Q}_\alpha - \hat{Q}_1}_{\text{petit}} + \hat{Q}_1 + \underbrace{(1-\alpha)\,\Delta_v}_{\text{petit+dissipatif}} \underbrace{- v\cdot\nabla_x}_{\text{dissipatif}}$$

- Décomposition de la partie élastique $\hat{Q}_1$:

$$\hat{Q}_1 = \underbrace{\hat{Q}^{+,*}_{1,S}}_{\text{régulier}} + \underbrace{\hat{Q}^{+,*}_{1,R}}_{\text{petit}} \underbrace{-\nu}_{\text{dissipatif}}$$

$$\hat{Q}^{+,*}_{1,S}(h) := \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2} \Theta_\delta[\mu'_*\, h' + \mu'\, h'_* - \mu\, h_*]\, |v - v_*|\, d\sigma\, dv_*$$
$$\hat{Q}^{+,*}_{1,R}(h) := \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2} (1-\Theta_\delta)[\mu'_*\, h' + \mu'\, h'_* - \mu\, h_*]\, |v - v_*|\, d\sigma\, dv_*$$
$$\nu(v) = \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2} \mu_*\, |v - v_*|\, d\sigma\, dv_* \approx \langle v\rangle.$$

- Espaces considérés : $a > 0$ et $\beta \in (0,1)$

$$\begin{cases} X_1 := W^{s+1,1}_x W^{4,1}_v \left(\langle v\rangle^2 e^{a\langle v\rangle^\beta}\right) \\ X_0 := W^{s,1}_x W^{2,1}_v \left(\langle v\rangle e^{a\langle v\rangle^\beta}\right) \\ X_{-1} := W^{s-1,1}_x L^1_v \left(e^{a\langle v\rangle^\beta}\right) \end{cases}$$

- Découpage :

$$\mathcal{A}_\alpha := \hat{Q}^{+,*}_{1,S}$$

et

$$\mathcal{B}_\alpha := \hat{Q}^{+,*}_{1,R} + \hat{Q}_\alpha - \hat{Q}_1 + (1-\alpha)\,\Delta_v - \nu - v\cdot\nabla_x.$$

Théorème (T.)

Il existe $\alpha_0 \in [0,1)$ *et* $\lambda_0 > 0$ *tel que pour tout* $\alpha \in [\alpha_0, 1]$, $\mathcal{L}_\alpha$ *satisfait dans* X_0 *les propriétés suivantes :*

(i) $\Sigma(\mathcal{L}_\alpha) \cap \Delta_{-\lambda_0} = \{\mu_\alpha, 0\}$ *avec* $\mu_\alpha \in \mathbb{R}$. 0 *et une v.p. de dimension 4 et* μ_α *est une v.p. de dimension 1.*

(ii) μ_α *satisfait l'estimation suivante :*

$$\mu_\alpha = -C(1-\alpha) + \mathcal{O}\left((1-\alpha)^2\right), \; C > 0.$$

(iii) *Le semi-groupe généré par* $\mathcal{L}_\alpha$ *a la propriété de décroissance suivante pour tout* $\lambda \neq -\mu_\alpha$, $\lambda \in (0, \lambda_0)$*:*

$$\|S_{\mathcal{L}_\alpha}(t) - S_{\mathcal{L}_\alpha}(t)\Pi_{\mathcal{L}_\alpha,0} - S_{\mathcal{L}_\alpha}(t)\Pi_{\mathcal{L}_\alpha,\mu_\alpha}\|_{\mathscr{B}(X_0)} \leq Ce^{-\lambda t}, \; C > 0.$$

Théorème (T.)

Il existe $\alpha_0 \in [0,1)$ *tel que pour tout* $\alpha \in [\alpha_0, 1]$, *il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que pour toute donnée initiale* $f_{in} \in \mathcal{E}_0$ *vérifiant*

$$\|f_{in} - G_\alpha\|_{\mathcal{E}_0} \le \varepsilon,$$

et f_{in} *de même masse et moment que* G_α, *il existe une solution globale unique* $f \in L^\infty_t(\mathcal{E}_0)$. *De plus, cette solution satisfait pour tout* $\lambda \in (0, -\mu_\alpha)$

$$\forall\, t \ge 0, \quad \|f(t) - G_\alpha\|_{\mathcal{E}_0} \le C e^{-\lambda t} \|f_{in} - G_\alpha\|_{\mathcal{E}_0}, \ C \ge 1.$$

- Fokker-Planck discret ($k(x) = 1/2(\delta_1 + \delta_{-1})$).
- Passage “uniforme” de Boltzmann à Landau.
- Limite hydrodynamique pour l’équation de Boltzmann inélastique.
- Etude de l’équation de Boltzmann sans troncature angulaire homogène en espace pour des potentiels mous.
- Etude de l’équation de Boltzmann sans troncature angulaire non homogène en espace.

Merci pour votre attention !