Université Paris Dauphine
Master 1 MMD
Analyse fonctionnelle approfondie

Partiel du Vendredi 6 Novembre 2015.

Durée 2h.

Les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront être clairement énoncés.

Exercice 1 (Convergence faible)

1. Soit H un espace de Hilbert. Rappeler la définition de la convergence faible dans H.
2. Dans cette question seulement, on suppose que $f_n(x) = x\sin(nx)$, $x \in [0,1]$.
   (i) Démontrer que la suite (f_n) converge faiblement vers 0 dans $L^2([0,1])$.
   (ii) Démontrer que $((f_n)^2)$ converge faiblement dans $L^2([0,1])$ vers une fonction que l'on déterminera. (rappel : $\sin^2(t) = (1-\cos(2t))/2$).

   Dans toute la suite, on considère une suite (f_n) de $L^2([0,1])$ qui converge faiblement vers une fonction $f \in L^2([0,1])$.
3. Soit (g_n) une autre suite de $L^2([0,1])$ qui converge faiblement vers une fonction $g \in L^2([0,1])$. On suppose que $f_n \leq g_n$ p.p. pour tout n.
   (i) Soit $\phi \in L^2([0,1])$ avec $\phi \geq 0$ p.p. Montrer que
   $$\int_0^1 f(x)\phi(x)dx \leq \int_0^1 g(x)\phi(x)dx.$$
   (ii) En déduire que $f \leq g$ p.p..
4. Montrer que la suite $(|f_n|)$ est bornée dans $L^2([0,1])$ et en déduire qu'il existe une sous-suite $(|f_{n_k}|)$ qui converge faiblement vers une fonction $g \in L^2([0,1])$.
5. Déduire alors de la question (3) que $|f| \leq g$ p.p.
6. Plus généralement, soit $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe C^1 telle que $(\Psi(f_n))$ est bornée dans $L^2([0,1])$. On suppose que $(\Psi(f_n))$ converge faiblement vers une fonction h dans $L^2([0,1])$.
   (i) Vérifier que, pour tout $s,t \in \mathbb{R}$, $\Psi(s) \geq \Psi(t) + \Psi'(t)(s-t)$.
   (on pourra utiliser le fait que, comme Ψ est convexe, Ψ' est croissante sur $\mathbb{R}$).
   (ii) En utilisant la question (3), montrer que, si $k \in L^\infty([0,1])$, on a
   $$\Psi'(k(x))(f(x)-k(x)) + \Psi(k(x)) \leq h(x) \qquad \text{p.p.t. } x \in \mathbb{R}.$$
   (iii) En déduire que $\Psi(f) \leq h$ p.p. (on soignera particulièrement la démonstration).

Exercice 2 (Compacité, Ascoli) Soit C^0 l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit qu'une suite de fonctions (f_n) de C^0 converge *localement uniformément* vers une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si, pour tout $M > 0$, la restriction à l'intervalle $[-M,M]$ de (f_n) converge uniformément vers f.

1. Montrer que, si une suite (f_n) de C^0 converge localement uniformément vers une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

2. Soit (f_n) la suite de C^0 définie par $f_n(x) := \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$, pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

   (i) Montrer que (f_n) converge simplement vers la fonction $f(x) := e^x$ et que $f_n(x) \leq f(x)$ pour tout $x > -n$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   (ii) Montrer que, pour tout $M > 0$, il existe une constante C_M telle que $|f_n'(x)| \leq C_M$ pour tout $x \in [-M, M]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n > M$.

   (iii) Déduire du théorème d'Ascoli que la suite (f_n) converge localement uniformément vers f.

   (iv) Montrer que (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

   (v) Soit $g_n(x) := f_n(x)e^{-2|x|}$. Montrer que $|g_n(x)| \leq e^{-|x|}$ pour tout $x > -N$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   (vi) Montrer que la suite (g_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction g que l'on déterminera.

   On dit qu'un sous-ensemble E de C^0 est pré-compact si, pour toute suite (f_n) de C^0, il existe une fonction $f \in C^0$ et une suite extraite (f_{n_k}) qui converge localement uniformément f. On dira qu'une suite (f_n) de C^0 est pré-compacte si l'ensemble $E := \{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est pré-compact dans C^0.

3. On suppose que l'ensemble E est pré-compact dans C^0. Montrer que l'ensemble $K := \{f(0) \mid f \in E\}$ est un ensemble borné.

4. Soit (f_n) une suite de C^0 telle que, pour tout $M > 0$, la restriction à $[-M, M]$ de la suite (f_n) est pré-compacte dans $C^0([-M, M])$. Montrer alors que la suite (f_n) est pré-compacte.

5. Soit (f_n) une suite de fonctions de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $C > 0$ telle que $|f_n(0)| + |f_n'(x)| \leq C$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déduire de la question précédente que (f_n) est pré-compacte dans C^0.

Barème indicatif : Exercice 1 : 10 points, Exercice 2 : 10 points.

Université Paris Dauphine
Master 1 MMD
Analyse fonctionnelle approfondie

Examen de Janvier 2016.

Durée 2h.

Les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront être clairement énoncés.

Exercice 1 Soient $a : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $b : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues, strictement positives sur $[0,1]$. On pose

$$A(u,v) = \int_0^1 \big(a(t)u'(t)v'(t) + b(t)u(t)v(t)\big)dt \qquad \forall u,v \in H^1([0,1]).$$

On rappelle que $A : H^1([0,1]) \times H^1([0,1]) \to \mathbb{R}$ est bilinéaire, continue et coercive. On déduit alors du théorème de Lax-Milgram que, pour tout $f \in L^2([0,1])$, il existe un unique élément $u \in H^1([0,1])$ tel que

$$A(u,v) = \langle f, v\rangle_{L^2} \qquad \forall v \in H^1([0,1]).$$

On notera $K : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ l'application qui à f associe $K(f) := u$.

1. Montrer que K est une application linéaire.
2. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $f \in L^2([0,1])$, et si on pose $u = K(f)$, alors
$$\|u\|_{H^1} \le C\|f\|_{L^2}.$$
3. En déduire que K est continue et compacte sur $L^2([0,1])$.
4. Montrer que K est auto-adjoint.

   D'après le cours, on sait qu'il existe alors une base de hilbertienne $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $L^2([0,1])$ constituée de vecteurs propres de K. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note λ_k la valeur propre associée à e_k.

5. Montrer que
$$\lambda_k = \frac{1}{A(e_k, e_k)} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$
6. On pose $v_k = \lambda_k^{1/2} e_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $H^1([0,1])$ lorsque l'on munit $H^1([0,1])$ du produit scalaire A.
7. On suppose que $a(t) = b(t) = 1$ pour tout $t \in [0,1]$.
   (a) Montrer que, si $f \in C^0([0,1])$, alors $u := K(f)$ est de classe $C^2([0,1])$ et vérifie
   $$-u''(t) + u(t) = f(t) \quad \forall t \in [0,1], \qquad\qquad u'(0) = u'(1) = 0.$$
   (b) Déterminer alors le spectre de K et démontrer que la famille $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par
   $$e_0(t) = 1, \qquad e_k(t) = \sqrt{2}\cos(k\pi t) \qquad \forall t \in [0,1],\ k \in \mathbb{N}^*$$
   est une base Hilbertienne de $L^2([0,1])$ constituée de vecteurs propres de K.

Exercice 2 On considère le problème

$$(\mathcal{P}) \qquad \inf\left\{\int_0^1 (x'(t))^2 dt \text{ avec } x \in H^1([0,1]),\ \int_0^1 x(t)dt = 0,\ \int_0^1 (x(t))^2 dt = 1\right\}.$$

1. Montrer qu'il existe $x \in H^1([0,1])$ tel que $\int_0^1 x(t)dt = 0$ et $\int_0^1 (x(t))^2 dt = 1$.
2. (Une inégalité de Poincaré)
   (a) Soit $x \in H^1([0,1])$ avec $\int_0^1 x(t)dt = 0$. Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $x(c) = 0$ et vérifier que, pour tout $t \in [0,1]$,
   $$|x(t)| \leq \|x'\|_{L^2} |t-c|^{\frac{1}{2}}.$$
   (b) En déduire que, pour tout $x \in H^1([0,1])$ avec $\int_0^1 x(t)dt = 0$,
   $$\|x\|_{L^2} \leq \sup_{t\in[0,1]} |x(t)| \leq \|x'\|_{L^2}.$$
3. Soit (x_n) une suite minimisante pour le problème $(\mathcal{P})$.
   (a) Montrer que (x_n) est bornée dans $H^1([0,1])$ et dans $L^\infty([0,1])$.
   (b) En déduire que le problème $(\mathcal{P})$ possède au moins une solution.
4. Soit $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la base Hilbertienne de $L^2([0,1])$ définie par la dernière question de l'exercice 1. Montrer qu'une solution du problème $(\mathcal{P})$ est la fonction e_1.

Barème indicatif : Exercice 1 : 12 points, Exercice 2 : 8 points.

Université Paris Dauphine
Master 1 MMD
Analyse fonctionnelle approfondie

Examen de rattrapage du 11/07/2016.

Durée 2h.

Les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront être clairement énoncés.

Exercice 1 Soit $a : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 strictement positive sur $[0,1]$ et $b : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive. Rappelons que $H^1_0([0,1])$ est le sous-ensemble fermé de H^1 défini comme l'ensemble des $x \in H^1$ tels que $x(0) = x(1) = 0$. A tout $f \in L^2$, on associe l'unique solution (au sens distribution) $u \in H^1_0$ de

$$-(au')' + bu = f \text{ dans } [0,1], \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

1. Montrer en utilisant le théorème de Lax-Milgram que u est bien défini de façon unique.
2. Montrer que l'application $f \to u$ est linéaire continue de L^2 dans H^1_0.
3. Démontrer que l'application $K : L^2 \to L^2$ qui à f associe $u := K(f)$ est compacte.
4. Vérifier que K est auto-adjoint.

   Un théorème de cours affirme alors que qu'il existe une base hilbertienne $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de L^2 constituée de vecteurs propres de K. On note λ_i la valeur propre associée au vecteur propre e_i.

5. Montrer que $\lambda_i > 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et que $\lambda_i \to +\infty$ lorsque $i \to +\infty$.
6. On suppose que $a = 1$ et $b = 0$. Déterminer les valeurs propres de K.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. On fixe $x_0 \in \mathbb{R}$ et on cherche à montrer que l'équation différentielle :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) & t \in [0,1] \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

possède une solution. Pour cela, on construit une suite de fonctions continues $x^n : [0,1] \to \mathbb{R}$ comme suit : soit $n \in \mathbb{N}^* := \mathbb{N}\backslash\{0\}$. On définit par récurrence sur $k \in \{0, \dots, n\}$ la suite réelle (x^n_k) par

$$x^n_0 = x_0, \qquad x^n_{k+1} := x^n_k + \frac{1}{n} f(k/n, x^n_k)$$

Puis on pose, pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$ et $t \in [k/n, (k+1)/n]$,

$$x^n(t) = (k+1-nt)\, x^n_k + (nt-k)\, x^n_{k+1}$$

1. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, on a $|x^n_k| \leq C$.
2. En déduire que $\sup_{t\in[0,1]} |x^n(t)| \leq C$.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $s, t \in [0, 1]$,

$$|x^n(t) - x^n(s)| \leq \|f\|_\infty |t - s|$$

(où $\|f\|_\infty = \sup_{(t,y)\in[0,1]\times\mathbb{R}} |f(t, y)|$).

4. Conclure qu'il existe une fonction continue $x : [0, 1] \to \mathbb{R}$ et une sous-suite (x^{n_k}) de la suite de fonctions (x^n), telles que (x^{n_k}) converge uniformément vers x sur $[0, 1]$.

5. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, 1]$,

$$x^n(t) - x_0 = \int_0^t \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}, x^n(\frac{k}{n})\right) \mathbf{1}_{[k/n,(k+1)/n[}(s) ds.$$

où, si I est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, $\mathbf{1}_I(s) = 1$ si $s \in I$ et $\mathbf{1}_I(s) = 0$ sinon.

6. En déduire finalement que, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$x(t) - x_0 = \int_0^t f(s, x(s)) ds.$$

Barème indicatif : Exercice 1 : 10 points, Exercice 2 : 10 points.

Université Paris Dauphine
Master 1 MMD
Analyse fonctionnelle approfondie

Partiel du Vendredi 4 Novembre 2016.

Durée 2h.

Les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront être clairement énoncés. Dans les deux exercices, on pourra admettre le résultat d'une question pour traiter les questions suivantes.

Exercice 1 Soit $p \geq 1$. Pour $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $h \in \mathbb{R}$, on pose

$$\tau_h f(x) = f(x+h) \qquad x \in \mathbb{R}.$$

On suppose que (f_n) est une suite dans $L^p(\mathbb{R})$ telle que

(i) (f_n) est bornée dans $L^p(\mathbb{R})$,

(ii) Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\sigma > 0$ tel que, pour tout $|h| \leq \sigma$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|\tau_h f_n - f_n\|_{L^p} \leq \epsilon,$$

(iii) Il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n a son support dans $[0, M]$.

L'objet de l'exercice est de montrer qu'il existe $f \in L^p(\mathbb{R})$ et une suite extraite de (f_n) qui converge vers f.

Pour cela on considère une fonction $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$, positive sur $\mathbb{R}$, à support dans $[-1, 1]$ et telle que $\int_{\mathbb{R}} \phi(x)dx = 1$. Pour $\delta > 0$ on pose $\phi_\delta(x) = \delta^{-1}\phi(x/\delta)$. On rappelle que ϕ_δ a son support dans $[-\delta, \delta]$ et que $\int_{\mathbb{R}} \phi_\delta(x)dx = 1$. Enfin, on rappelle que, si $f \in L^p(\mathbb{R})$, alors le produit de convolution

$$\phi_\delta * f(x) = \int_R \phi_\delta(x-y)f(y)dy = \int_R \phi_\delta(y)f(x-y)dy$$

est bien défini et que $\phi_\delta * f \in L^p(\mathbb{R})$.

1. Montrer, en utilisant l'inégalité de Jensen que, pour tout $f \in L^p$,

$$|\phi_\delta * f(x) - f(x)|^p \leq \int_{\mathbb{R}} \phi_\delta(y) \, |f(x-y) - f(x)|^p \, dy.$$

2. En déduire que, si $f \in L^p$,

$$\|\phi_\delta * f - f\|_{L^p}^p \leq \int_{\mathbb{R}} \phi_\delta(y) \, \|\tau_{-y} f - f\|_{L^p}^p \, dy.$$

3. Montrer alors que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\sigma > 0$ tel que, pour tout $\delta \in]0, \sigma]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\|\phi_\delta * f_n - f_n\|_{L^p} \leq \epsilon.$$

4. Montrer que, pour tout $\delta > 0$, le support de $\phi_\delta * f_n$ est inclus dans $[-\delta, M + \delta]$.

5. Montrer que, à $\delta > 0$ fixé, la famille $\{\phi_\delta * f_n\}$ est équicontinue sur $\mathbb{R}$.

6. En déduire que, pour tout $\delta \in]0,1]$, il existe une fonction continue $g_\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une sous-suite $(\phi_\delta * f_{n_k})$ qui converge uniformément vers g_δ dans l'intervalle $[-1, M+1]$.
7. Démontrer qu'en fait il existe une suite extraite (n_k) telle que, pour tout $r \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, la suite $(\phi_{1/r} * f_{n_k})$ converge uniformément vers une fonction g_r dans l'intervalle $[-1, M+1]$. (On pourra utiliser un résultat du cours)
8. On étend g_r par 0 en dehors de $[-1, M+1]$. Montrer que, pour tout $r \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $(\phi_{1/r} * f_{n_k})$ converge vers g_r dans $L^p(\mathbb{R})$.
9. Montrer que la suite (g_r) est de Cauchy dans $L^p(\mathbb{R})$. On note f sa limite dans $L^p(\mathbb{R})$.
10. Montrer finalement que la suite (f_{n_k}) converge vers f dans $L^p(\mathbb{R})$.

Exercice 2 Il est possible d'étendre la notion de convergence faible aux espaces de Banach. Soit E un Banach, on note E' le dual de E, c'est-à-dire l'espace des formes linéaires continues sur E. Muni de la norme

$$|||f||| := \sup_{x\in E,\ \|x\|\leq 1} f(x)$$

c'est aussi un espace de Banach. On dit qu'une suite (x_n) d'éléments de E converge faiblement vers $x \in E$ si, pour tout $f \in E'$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x).$$

1. Montrer que si (x_n) converge fortement vers $x \in E$, alors (x_n) converge faiblement vers x.

   On rappelle le théorème de Banach-Steinhaus: si F et G sont des espace de Banach et si $(T_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque d'applications linéaires continues de F and G telle que

   $$\sup_{i\in I} \|T_i(x)\|_G < +\infty \qquad \forall x \in F,$$

   alors la famille (T_i) est équi-continue : $\sup_{i\in I} |||T_i||| < \infty$.
   On rappelle aussi que, pour tout $x \in E$, on a

   $$\|x\| = \sup\left\{f(x), \qquad \text{où } f \in E',\ |||f||| \leq 1\right\}.$$

2. Démontrer que, si (x_n) converge faiblement vers x dans E, alors la suite (x_n) est bornée.
3. En déduire que, si (x_n) converge faiblement vers x, alors

   $$\|x\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|.$$

4. On suppose que (f_n) converge fortement vers f dans E' et que (x_n) converge faiblement vers x dans E. Montrer que $(f_n(x_n))$ tend vers $f(x)$.
5. On pose $E = L^1(]0,1[)$. Rappelons que $E' = L^\infty(]0,1[)$. Pour $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = n$ si $x \in [0, 1/n]$ et $f_n(x) = 0$ si $x \in]1/n, 1]$.
   (i) Montrer que la suite (f_n) est bornée dans E.
   (ii) On suppose qu'il existe $f \in E$ et une sous-suite (f_{n_k}) qui converge faiblement vers f dans E. Démontrer que nécessairement $f = 0$ p.p.
   (iii) Montrer cependant que $\int_0^1 f(x)dx = 1$ et conclure que (f_n) n'admet pas de sous-suite faiblement convergente dans E.

Barème indicatif : Exercice 1 : 10 points, Exercice 2 : 10 points.

Université Paris Dauphine
Master 1 MMD
Analyse fonctionnelle approfondie

Examen du Jeudi 12 Janvier 2017.

Durée 2h.

Les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront être clairement énoncés. Dans les deux exercices, on pourra admettre le résultat d'une question pour traiter les questions suivantes.

Exercice 1 Soit $a : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement positive sur $[0,1]$. On considère le problème de minimisation

$$\inf \left\{ \int_0^1 u(t)dt \qquad \text{sous contrainte } u \in H_0^1([0,1]),\ \int_0^1 a(t)(u'(t))^2 dt \leq 1 \right\}.$$

On note I l'infimum du problème.

1. Soit (u_n) une suite minimisante du problème, c'est-à-dire, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in H_0^1([0,1])$, $\int_0^1 a(t)(u_n'(t))^2 dt \leq 1$ et $\lim_n \int_0^1 u_n(t)dt = I$.
   Montrer que la suite (u_n) est bornée dans $H^1([0,1])$.

2. Soit (v_n) une suite de $L^2([0,1])$ qui converge faiblement vers $v \in L^2([0,1])$. On suppose que $\int_0^1 a(t)(v_n(t))^2 dt \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (i) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\int_0^1 a(t)\left(2v(t)v_n(t) - (v(t))^2\right) dt \leq \int_0^1 a(t)(v_n(t))^2 dt.$$

   (ii) En déduire que $\int_0^1 a(t)(v(t))^2 dt \leq 1$.

3. En utilisant les questions précédentes, montrer que le problème admet un minimum.

4. Montrer que I est strictement négatif (on ne cherchera pas à calculer I).

Exercice 2 On considère $H = L^2([0,1])$ muni du produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de sa norme $\| \cdot \|$. On note $\mathcal{L}(H)$ l'ensemble des applications linéaires continues de H dans H. Si $T \in \mathcal{L}(H)$, on note $|||T|||$ sa norme. On définit l'application $V : H \to H$ par

$$V(f)(x) = \int_0^x f(t)dt \qquad \forall x \in [0,1],\ \forall f \in H.$$

L'objet de cet exercice est de montrer que $V \in \mathcal{L}(H)$ et (surtout) de calculer sa norme.

1. Montrer que $V \in \mathcal{L}(H)$.

2. Montrer que V est un opérateur compact (on pourra utiliser le théorème d'Ascoli).

3. On rappelle que l'opérateur adjoint de V est l'opérateur linéaire continu $V^* \in \mathcal{L}(H)$ défini par
$$\langle V^*(f), g\rangle = \langle f, V(g)\rangle \qquad \forall f, g \in H.$$
Montrer que
$$V^*(f)(x) = \int_x^1 f(t)dt \qquad \forall x \in [0,1],\ \forall f \in H.$$

4. Vérifier que $\sup_{\|g\|\leq 1} \langle f, g\rangle = \|f\|$ pour tout $f \in H$ et en déduire que
$$|||V||| = |||V^*|||.$$

A partir de maintenant on définit l'opérateur linéaire continu $T \in \mathcal{L}(H)$ par $T = V^* \circ V$.

5. Montrer que T est compact et auto-adjoint.

6. (i) Vérifier que $|||T||| \leq |||V^*|||\ |||V|||$.
   (ii) Vérifier aussi que $\langle T(f), f\rangle = \|V(f)\|^2$ pour tout $f \in H$, et en déduire que $|||V||| \leq |||T|||^{1/2}$.
   (iii) Conclure que $|||V||| = |||T|||^{1/2}$.

7. On pose $M = \sup_{\|f\|\leq 1} \langle T(f), f\rangle$ et on rappelle que M est une valeur singulière de T. Vérifier que M est la plus grande valeur propre de T et en déduire que $M = |||T|||$.

8. On rappelle que la primitive d'une fonction de $L^2([0,1])$ est une fonction de $H^1([0,1])$. En remarquant que
$$T(f)(x) = \int_x^1 \int_0^y f(t)dtdy \qquad \forall x \in [0,1],\ \forall f \in H,$$
vérifier que, pour tout $f \in H$, on a $T(f) \in H^1([0,1])$, $T(f)' \in H^1([0,1])$, $T(f)(1) = 0$ et $T(f)'(0) = 0$. Montrer aussi que $(T(f)')' = -f$.

9. Déterminer toutes les valeurs propres de T et en déduire $|||V|||$.

Barème indicatif : Exercice 1 : 6 points, Exercice 2 : 14 points.

Université Paris Dauphine
Master 1 MMD
Analyse fonctionnelle approfondie

Partiel du 03/10/2017.

Durée 2h.

Les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront être clairement énoncés. Dans les deux exercices, on pourra admettre le résultat d'une question pour traiter les questions suivantes.

Exercice 1 Soit (X, d) un espace métrique compact. A tout sous-ensemble compact non vide K de X on associe la fonction distance

$$d_K(x) = \min_{y \in K} d(x, y) \qquad \forall x \in X.$$

1. Montrer que d_K est une fonction Lipschitzienne de constante 1 :
$$|d_K(x) - d_K(x')| \leq d(x, x') \qquad \forall x, x' \in X.$$
2. Soit (K_n) une suite de sous-ensembles compacts non vides de X. On suppose que la suite (d_{K_n}) converge uniformément vers une fonction $\phi : X \to \mathbb{R}$. Soit
$$K := \{x \in X,\ \phi(x) = 0\}.$$
   (a) Vérifier que K est un sous-ensemble non vide et compact de X.
   (b) Montrer que $\phi = d_K$.

   On considère l'ensemble $\mathcal{K}$ des compacts non vides de X. Sur $\mathcal{K}$ on définit la distance
$$\delta(K_1, K_2) := \|d_{K_1} - d_{K_2}\|_\infty,$$
   où $\|\cdot\|_\infty$ est la norme sup habituelle sur l'espace des fonctions continues sur X.
3. Vérifier que δ est bien une distance sur $\mathcal{K}$.
4. Montrer que $\mathcal{K}$ est compact pour la distance δ.

Exercice 2 Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie, avec un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et une norme notée $\|\cdot\|$. On suppose que H possède une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(on rappelle que cela signifie que (e_n) est une famille orthonormée de H qui est totale, c'est à dire que l'espace vectoriel engendré par (e_n) est dense dans H. En particulier, pour tout $x \in H$, la suite $(\sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans H vers x).* On note B la boule unité fermée de H. On définit sur $B \times B$ la fonction

$$d(x_1, x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\langle x_1 - x_2, e_n\rangle|}{n^2+1} \qquad \forall x_1, x_2 \in B.$$

1. Montrer que d est bien définie et est une distance sur B.

2. On suppose qu'une suite (x_k) d'éléments de B converge faiblement vers $x \in H$.

   (a) *Démontrer* que x appartient à B.

   (b) Prouver que (x_k) tend vers x pour la distance d.

3. Inversement, soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de B qui converge pour la distance d vers un élément $x \in B$.

   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, la suite réelle $(\langle x_k, e_n\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\langle x, e_n\rangle$ lorsque $k \to +\infty$.

   (b) En déduire que la suite (x_k) converge faiblement vers x.

4. On suppose maintenant qu'il existe une distance δ sur $H \times H$ avec la propriété suivante : pour toute suite (x_k) de H et pour tout élément $x \in H$, (x_k) converge faiblement vers x, si et seulement si, (x_k) converge vers x pour la distance δ.

   (a) Montrer que la suite (e_n) (où (e_n) est la base hilbertienne de H introduite plus haut) tend faiblement vers 0 lorsque n tend vers l'infini, mais qu'elle ne tend pas fortement vers 0.

   (b) Montrer qu'il existe une suite extraite (n_k) telle que $\delta(0, ke_{n_k}) \leq 1/k$ pour tout $k \geq 1$. On pose $x_k = ke_{n_k}$ pour tout $k \geq 1$.

   (c) Vérifier que la suite (x_k) tend faiblement vers 0 lorsque $k \to +\infty$ mais que $\|x_k\| \to +\infty$.

   (d) Que peut-on en déduire ?

Barème indicatif : Exercice 1 : 8 points. Exercice 2 : 12 points.

Université Paris Dauphine
Master 1 MMD
Analyse fonctionnelle approfondie

Examen du 18/01/2018.

Durée 2h.

Les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront être clairement énoncés. Dans les deux exercices, on pourra admettre le résultat d'une question pour traiter les questions suivantes.

Exercice 1 Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose $I =]-1, 1[$ et note L^2 et H^1 pour $L^2(I)$ et $H^1(I)$ respectivement. On rappelle l'inégalité de Poincaré :

$$\|x\|_{L^2} \leq \|x'\|_{L^2} \qquad \forall x \in H^1 \text{ avec } x(0) = 0.$$

On considère le problème de calcul des variations suivant :

$$(*) \qquad \inf \left\{ J(x), \quad x \in H^1, \ x(0) = 0 \right\} \qquad \text{où } J(x) := \int_0^1 \left(\frac{1}{2}|x'(t)|^2 + g(x(t)) \right) dt.$$

Noter que, par rapport au cas "classique" du cours, la fonction g n'est pas nécessairement bornée et la condition terminale $x(1)$ n'est pas spécifiée.

1. On suppose, *dans cette question seulement*, que $g(s) = -\theta s^2$ où $\theta > 0$.
   (i) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $y_n : I \to \mathbb{R}$ définie par
   $$y_n(t) = \begin{cases} nt & \text{si } t \in]0, 1/2] \\ n(1-t) & \text{si } t \in [1/2, 1[\end{cases}$$
   Montrer que $y_n \in H^1$.
   (ii) Calculer $J(y_n)$ et en déduire qu'il existe $\theta_0 > 0$ tel que, pour tout $\theta \geq \theta_0$, le problème $(*)$ n'admet pas de solution.

   Dans toute la suite, on suppose que g vérifie l'inégalité suivante : il existe $C > 0$ et $\theta \in]0, 1/2[$ tels que
   $$g(s) \geq -C - \theta s^2 \qquad \forall s \in \mathbb{R}.$$
2. Soit (x_n) une suite minimisante du problème $(*)$. Montrer que (x'_n) est bornée dans L^2.
3. En déduire qu'il existe une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ et $x \in H^1$ tels que $(x_{\phi(n)})$ converge uniformément vers x sur $[0, 1]$ et $(x'_{\phi(n)})$ converge faiblement vers x' dans $L^2(I)$.
4. En déduire que le problème $(*)$ admet un minimum.

   On suppose à partir de maintenant que g est de classe C^1. On fixe x un minimum du problème et on admet que $J : H^1 \to \mathbb{R}$ est différentiable en x avec
   $$J'(x)(v) = \int_0^1 \left(x'(t)v'(t) + g'(x(t))v(t) \right) dt \qquad \forall v \in H^1.$$

5. Montrer que

$$\int_0^1 (\ x'(t)v'(t) + g'(x(t))v(t)\ )\ dt = 0 \qquad \forall v \in H^1 \text{ avec } v(0) = 0.$$

6. En déduire que x' est dans H^1 et calculer sa dérivée.

7. Montrer finalement que $x'(1) = 0$ et conclure que x est une solution de classe C^2 de l'équation

$$\begin{cases} x''(t) = g'(x(t)) & t \in [0,1] \\ x(0) = 0, \qquad x'(1) = 0. \end{cases}$$

Exercice 2 Dans tout l'exercice, $H = L^2(I)$ où $I =]0,1[$. On fixe $R \in L^2(I \times I)$.

1. Soit (x_n) une suite de H et $x \in H$. On suppose que la suite (x_n) tend faiblement vers x dans H. On pose

$$v_n(t) := \int_0^1 R(s,t)x_n(s)ds \qquad \text{et} \qquad v(t) := \int_0^1 R(s,t)x(s)ds.$$

Montrer que $v_n \in H$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $(v_n(t))$ tend vers $v(t)$ pour presque tout $t \in]0,1[$.

2. Montrer que (v_n) tend en fait vers v dans H.

3. On définit $T : H \to H$ par

$$T(x)(t) = \int_0^1 R(s,t)x(s)ds \qquad \text{pour p.t. } t \in]0,1[,\ \forall x \in H.$$

Montrer que T est un opérateur linéaire continu et compact sur H.

4. Quel est l'adjoint de T ?

5. *On suppose dans toute la suite* que $R(s,t) = \min\{s,t\}$. Soit $x \in H$ et $z = T(x)$. Vérifier que z appartient à $H^1(I)$, que z' appartient également à $H^1(I)$ et calculer $(z')'$. Déterminer aussi $z(0)$ et $z'(1)$.

6. Déterminer toutes les valeurs propres de T.

7. Déduire des questions précédentes que la famille $(\sqrt{2}\sin((\pi/2 + k\pi)t))_{k\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H.

Barème indicatif : Exercice 1 : 10 points. Exercice 2 : 10 points.