Université Paris Dauphine
Master 1 MMD
Analyse fonctionnelle approfondie

Examen du Lundi 14 janvier 2019.

Durée 2h.

Les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront être clairement énoncés.
Dans tout le partiel, on pourra admettre le résultat d'une question pour traiter les questions suivantes et la difficulté des questions n'est pas forcément croissante.

Exercice 1. Dans cet exercice, on note $I = [0,1]$ et on considère des réels a, b tels que $0 < a < b < 1$. On considère une fonction $f \in L^2(I) \setminus \{0\}$. On définit la fonctionnelle J sur $H^1(I)$ par

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_0^1 (v'(t))^2 dt + \frac{1}{2}\left(\int_a^b v(t)\,dt\right)^2 + \int_0^1 f(t)v(t)\,dt, \quad \forall\, v \in H^1(I).$$

On s'intéresse au problème de calcul des variations suivant :

$$\min\{J(v), v \in H^1(I), v(0) = 0\}. \tag{$\mathcal{P}$}$$

1. Montrer que la fonctionnelle J est bien définie sur $H^1(I)$ et que $\inf\{J(v), v \in H^1(I), v(0) = 0\} \leq 0$.
2. (a) Montrer que pour tout $v \in H^1(I)$, on a :

$$\|v\|_{L^2(I)} \leq \|v'\|_{L^2(I)} + \frac{1}{b-a}\left|\int_a^b v(t)\,dt\right|.$$

Pour cela, on pourra utiliser le fait que tout élément v de $H^1(I)$ possède un représentant continu (noté encore v) qui vérifie

$$v(t) - v(s) = \int_s^t v'(\tau)\,d\tau, \quad \forall\,(t,s) \in I^2$$

et intégrer cette relation en s entre a et b.

(b) En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (v'(t))^2 dt + \frac{1}{2}\left(\int_a^b v(t)\,dt\right)^2 \geq C\|v\|^2_{H^1(I)}, \quad \forall\, v \in H^1(I).$$

Puis montrer qu'il existe une constante $C' > 0$ telle que

$$J(v) \geq C\|v\|^2_{H^1(I)} - C'\|v\|_{H^1(I)}, \quad \forall\, v \in H^1(I)$$

où la constante C est la même que dans l'inégalité précédente.

3. On considère une suite minimisante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ du problème $(\mathcal{P})$.

(a) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$C\|u_n\|^2_{H^1(I)} - C'\|u_n\|_{H^1(I)} - 1 \leq 0, \quad \forall n \geq N.$$

(b) Montrer qu'il existe $\bar{u} \in H^1(I)$ solution du problème $(\mathcal{P})$.

Solution.

1. *La fonctionnelle J est bien définie sur $H^1(I)$ car si $v \in H^1(I)$, on a $v \in L^2(I)$ et $v' \in L^2(I)$. Donc le premier terme est bien défini et les deux suivants le sont grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz puisque $0 < a < b < 1$:*

$$\left(\int_a^b v(t)\,dt\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b (v(t))^2 dt \leq \|v\|^2_{L^2(I)} \quad \textit{et} \quad \left|\int_0^1 f(t)v(t)\,dt\right| \leq \|f\|_{L^2(I)}\|v\|_{L^2(I)}.$$

De plus la fonction nulle appartient à $\{v \in H^1(I), v(0) = 0\}$ et $J(0) = 0$. On en déduit que $\inf\{J(v), v \in H^1(I), v(0) = 0\} \leq 0$.

2. (a) *On utilise l'indication de l'énoncé. Soit $v \in H^1(I)$. En considérant un représentant continu de v encore noté v, on a d'après le cours pour tout $(s,t) \in I^2$, $v(t) - v(s) = \int_s^t v'(\tau)\,d\tau$. En intégrant cette relation en $s \in]a, b[$, on obtient (en utilisant Cauchy-Schwarz) :*

$$\begin{aligned}\left|v(t)(b-a) - \int_a^b v(s)ds\right| &= \left|\int_a^b \int_s^t v'(\tau)\,d\tau\,ds\right| \leq \int_a^b \int_0^1 |v'(\tau)|\,d\tau\,ds \\ &\leq \int_a^b \|v'\|_{L^2(I)}\,ds = (b-a)\|v'\|_{L^2(I)}.\end{aligned}$$

D'où pour tout $t \in I$, on a :

$$|v(t)| \leq \frac{1}{b-a}\left|v(t)(b-a) - \int_a^b v(s)ds\right| + \frac{1}{b-a}\left|\int_a^b v(s)ds\right| \leq \|v'\|_{L^2(I)} + \frac{1}{b-a}\left|\int_a^b v(s)ds\right|.$$

On en déduit facilement la majoration voulue puisque $\|v\|_{L^2(I)} \leq \|v\|_{L^\infty(I)}$.

(b) *La question précédente implique que*

$$\|v\|^2_{L^2(I)} \leq 2\|v'\|^2_{L^2(I)} + \frac{2}{(b-a)^2}\left(\int_a^b v(s)ds\right)^2.$$

D'où

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_0^1 (v'(t))^2 dt + \frac{1}{2}\left(\int_a^b v(t)dt\right)^2 \\ &\quad\geq \frac{1}{2}\|v'\|^2_{L^2(I)} + \frac{(b-a)^2}{4}\|v\|^2_{L^2(I)} - \frac{(b-a)^2}{2}\|v'\|^2_{L^2(I)} \\ &\quad\geq \min\left(\frac{1}{2}(1-(b-a)^2), \frac{(b-a)^2}{4}\right)\|v\|^2_{H^1(I)} =: C\|v\|^2_{H^1(I)}\end{aligned}$$

d'où la conclusion souhaitée puisqu'on a $0 < (b-a)^2 < 1$. Puis, on a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$J(v) \geq C\|v\|^2_{H^1(I)} - \|f\|_{L^2(I)}\|v\|_{L^2(I)},$$

ce qui donne le résultat voulu en posant $C' = \|f\|_{L^2(I)}$. Notons que les constantes C et C' sont bien indépendantes de $v \in H^1(I)$.

3. (a) *Par définition, la suite* $(J(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $\inf\{J(v), v \in H^1(I), v(0) = 0\} \leq 0$. *Donc à partir d'un certain rang, on aura* $J(u_n) \leq 1$ *d'où d'après la question précédente, à partir d'un certain rang,* $C\|u_n\|^2_{H^1(I)} - C'\|u_n\|_{H^1(I)} - 1 \leq 0$.

   (b) *La fonction* $\varphi : x \in \mathbb{R} \mapsto Cx^2 - C'x - 1$ *tend vers* $+\infty$ *lorsque* $|x| \to +\infty$ *donc la suite* $(\|u_n\|_{H^1(I)})_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée puisque d'après la question précédente,* $\varphi(\|u_n\|_{H^1(I)}) \leq 0$ *pour tout* $n \geq N$.

   D'après le cours, on en déduit qu'il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *et un élément* $\bar{u} \in H^1(I)$ *tels que* $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* $\bar{u}$ *sur* $[0,1]$ *et* $(u'_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge faiblement vers* $\bar{u}'$ *dans* $L^2(I)$. *La convergence uniforme implique que* $\bar{u}(0) = 0$ *ce qui implique que* $\inf\{J(v), v \in H^1(I), v(0) = 0\} \leq J(\bar{u})$. *D'autre part, le fait que* $(u'_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge faiblement vers* $\bar{u}'$ *implique que* $\liminf_{n\to+\infty} \|u'_{\varphi(n)}\|^2_{L^2(I)} \geq \|\bar{u}'\|^2_{L^2(I)}$. *La convergence uniforme de* $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *vers* $\bar{u}$ *sur* $[0,1]$ *implique que* $\int_a^b u_{\varphi(n)}(s)\,ds \to \int_a^b \bar{u}(s)\,ds$ *lorsque* $n \to +\infty$ *puisque*

$$\left|\int_a^b (u_{\varphi(n)}(s) - u(s))\,ds\right| \leq \|u_{\varphi(n)} - u\|_{L^\infty(I)}(b-a).$$

   La convergence uniforme implique de la même manière que $\int_0^1 f(s)u_{\varphi(n)}(s)\,ds \to \int_0^1 f(s)\bar{u}(s)\,ds$. *Ainsi, on en déduit que* $\inf\{J(v), v \in H^1(I), v(0) = 0\} = \liminf_{n\to+\infty} J(u_{\varphi(n)}) \geq J(\bar{u})$ *puis on conclut que* $\inf\{J(v), v \in H^1(I), v(0) = 0\} = J(\bar{u})$.

Exercice 2. Soit $K : [0,1]^2 \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ une application mesurable telle que

$$C(K) = \max\left(\sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |K(x,y)|\,dy, \sup_{y\in[0,1]} \int_0^1 |K(x,y)|\,dx\right) < +\infty.$$

Dans tout l'exercice, on note $L^2 = L^2([0,1])$. On définit une application $T_K : L^2 \to L^2$ par

$$T_K(f)(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)\,dy, \quad \forall\, x \in [0,1].$$

1. Montrer que T_K est bien définie et que T_K est une application linéaire continue de L^2 dans L^2 de norme d'opérateur inférieure ou égale à $C(K)$.

   Pour cela, on pourra écrire que $|K(x,y)| = |K(x,y)|^{\frac{1}{2}}|K(x,y)|^{\frac{1}{2}}$.

2. Dans cette question, on suppose que $K : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ est continue sur $[0,1]^2$.

   (a) Montrer que pour $f \in L^2$, $T_K(f) \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.

   (b) Montrer que $T_K : L^2 \to L^2$ est un opérateur compact.

   Pour cela, on pourra utiliser le théorème d'Ascoli.

Les questions 3. et 4. peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

3. Dans cette question, on considère $\alpha \in]0,1[$ et on pose $K(x,y) = |x-y|^{-\alpha}$ pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$ tel que $x \neq y$ et $K(x,x) = +\infty$ pour tout $x \in [0,1]$.

   (a) Montrer que K ainsi définie vérifie bien $C(K) < +\infty$.

(b) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K_n = \inf(K, n)$. Montrer que les $T_{K_n} : L^2 \to L^2$ sont compacts.

(c) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a

$$C(K - K_n) \leq \frac{2}{1-\alpha} n^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}}.$$

(d) En déduire que l'opérateur $T_K : L^2 \to L^2$ est aussi compact.

4. Dans cette question, on pose $K(x, y) = e^{x+y}$ pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$.

(a) Déterminer le spectre et les valeurs propres de T_K.

(b) Expliquer comment construire une base hilbertienne de L^2 à partir des vecteurs propres de T_K.

Solution.

1. Soit $f \in L^2$. On a grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et par définition de $C(K)$:

$$\begin{aligned}
\|T_K(f)\|_{L^2}^2 &\leq \int_{x\in[0,1]} \left(\int_{y\in[0,1]} |K(x,y)|^{\frac{1}{2}} |K(x,y)|^{\frac{1}{2}} |f(y)| \, dy \right)^2 dx \\
&\leq \int_{x\in[0,1]} \left(\int_{y\in[0,1]} |K(x,y)| \, dy \right) \left(\int_{y\in[0,1]} |K(x,y)| f^2(y) \, dy \right) dx \\
&\leq C(K) \int_{x\in[0,1]} \int_{y\in[0,1]} |K(x,y)| f^2(y) \, dy \, dx.
\end{aligned}$$

Par Fubini-Tonelli, on obtient :

$$\|T_K(f)\|_{L^2}^2 \leq C(K) \int_{y\in[0,1]} \int_{x\in[0,1]} |K(x,y)| \, dx \, f^2(y) \, dy \leq C(K)^2 \|f\|_{L^2}^2,$$

d'où le résultat voulu.

2. (a) C'est vrai d'après le théorème de continuité sous le signe intégral.

(b) On considère $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de L^2. Il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $\|f_n\|_{L^2} \leq M$.

Montrons qu'on peut extraire une sous-suite uniformément convergente de la suite $(T_K(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ (qui est une suite de $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ d'après la question précédente) grâce au théorème d'Ascoli. L'application K étant continue sur $[0,1]^2$ qui est compact, elle y est bornée donc il existe une constante $C'(K) > 0$ telle que $|K(x,y)| \leq C'(K)$ pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$. Soit $x \in [0,1]$. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|T_K(f_n)(x)| \leq \int_0^1 |K(x,y)||f_n(y)| \, dy \leq C'(K) \int_0^1 |f_n(y)| \, dy \leq C'(K) \|f_n\|_{L^2} \leq C'(K) M$$

qui est bien borné indépendamment de n. Montrons maintenant que la suite $(T_K(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue en tout point x de $[0,1]$. Soient donc $x \in [0,1]$ et $\varepsilon > 0$. L'application K est continue sur $[0,1]^2$ donc y est uniformément continue. Il existe donc $\eta > 0$ tel que pour *tout $x' \in [0,1]$ tel que $|x-x'| \leq \eta$ et pour tout $y \in [0,1]$, on ait $|K(x,y)-K(x',y)| \leq \varepsilon/M$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x' \in [0,1]$ tel que $|x-x'| \leq \eta$, on a :*

$$|T_K(f_n)(x) - T_K(f_n)(x')| \leq \int_0^1 |K(x,y)-K(x',y)||f_n(y)|\,dy \leq \frac{\varepsilon}{M}\int_0^1 |f_n(y)|\,dy \leq \varepsilon$$

grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz. D'où l'équicontinuité. On peut donc appliquer le théorème d'Ascoli dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ puisque $[0,1]$ est compact et $\mathbb{R}$ est complet. Il existe donc $g \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $(T_K(f_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $(T_K(f_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur $[0,1]$.

On peut alors conclure en montrant que la convergence uniforme implique la convergence en norme L^2 puisque $\|T_K(f_{\varphi(n)}) - g\|_{L^2} \leq \|T_K(f_{\varphi(n)}) - g\|_{L^\infty}$.

3. (a) *On a pour tout $y \in [0,1]$:*

$$\int_0^1 |K(x,y)|\,dx = \int_0^1 |x-y|^{-\alpha}\,dx = \int_{-y}^{1-y} |x|^{-\alpha}\,dx \leq \int_{-1}^1 |x|^{-\alpha}\,dx < +\infty$$

car $\alpha < 1$. Par symétrie, on obtient $C(K) < +\infty$.

(b) *On remarque que pour tout n, les noyaux K_n sont continus sur $[0,1]^2$. En effet, les K_n sont clairement continus sur $[0,1]^2 \setminus \{(x,x), x \in [0,1]\}$ comme inf de deux fonctions continues. Soit maintenant $x \in [0,1]$. Montrons que K_n est continu en (x,x). Soit $(x_k,y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $[0,1]^2$ qui tend vers (x,x). Alors pour k assez grand, on aura $|x_k-y_k|^{-\alpha} > n$ i.e. pour k assez grand, $K_n(x_k,y_k) = K_n(x,x)$ d'où la continuité de K_n en (x,x). On peut donc appliquer la question 2 qui implique que les opérateurs T_{K_n} sont compacts.*

(c) *On a pour tout $y \in [0,1]$:*

$$\begin{aligned}\int_0^1 |K(x,y)-K_n(x,y)|\,dx &= \int_0^1 \mathbb{1}_{|x-y|^{-\alpha}\geq n}(|x-y|^{-\alpha}-n)\,dx \\ &\leq \int_0^1 \mathbb{1}_{|x-y|^{-\alpha}\geq n}|x-y|^{-\alpha}\,dx = \int_{-y}^{1-y} \mathbb{1}_{|x|\leq n^{-\frac{1}{\alpha}}}|x|^{-\alpha}\,dx \leq \int_{-1}^{1} \mathbb{1}_{|x|\leq n^{-\frac{1}{\alpha}}}|x|^{-\alpha}\,dx.\end{aligned}$$

Par parité, on obtient alors le résultat voulu :

$$\int_0^1 |K(x,y)-K_n(x,y)|\,dx \leq 2\int_0^{n^{-\frac{1}{\alpha}}} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{2n^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{1-\alpha}.$$

(d) *On a $T_K - T_{K_n} = T_{K-K_n}$. Donc en norme d'opérateur, on a d'après la question 1 :*

$$\|T_K - T_{K_n}\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C(K-K_n) \leq \frac{2n^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{1-\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

puisque $0<\alpha<1$. Ainsi, T_K est limite d'opérateurs compacts et d'après le cours, l'ensemble des opérateurs compacts est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(L^2)$ donc T_K est lui-même compact.

4. (a) *D'après la question 2, l'opérateur T_K est compact puisque le noyau K est continu. D'autre part, il est clairement auto-adjoint puisque K est symétrique en x et y. Donc d'après le cours, on a $0 \in \sigma(T_K)$ et si $\lambda \in \sigma(T_K)\setminus\{0\}$, alors $\lambda \in VP(T_K)$.*

Supposons que $\lambda \neq 0$ soit valeur propre de T_K, alors il existe $f \in L^2 \setminus \{0\}$ telle que

$$e^x \int_0^1 e^y f(y)\, dy = \lambda f(x).$$

Donc f est de la forme $f(x) = Ce^x$ avec $C \neq 0$. En multipliant cette relation par e^x et en intégrant entre 0 et 1, on obtient $\lambda = \int_0^1 e^{2y}\, dy = (e^2-1)/2$. Réciproquement, on vérifie que $\lambda = \int_0^1 e^{2y}\, dy$ et $f(x) = Ce^x$ avec $C \neq 0$ sont tels que $T_K(f) = \lambda f$. Ainsi, la seule valeur propre non nulle de T_K est $\int_0^1 e^{2y}\, dy$, son espace propre est de dimension 1 et est engendré par la fonction exp.

Étudions maintenant le cas de la valeur spectrale 0. Soit $f \in L^2 \setminus \{0\}$. On remarque qu'en notant $c_f = \int_0^1 f(y)e^y\, dy$, la fonction g définie par $g(y) = f(y) - c_f e^{-y}$ sur $[0,1]$ est telle que $T_K g = 0$. On en déduit que 0 est valeur propre de T_K et son espace propre est de dimension infinie.

En conclusion, $\sigma(T_K) = VP(T_K) = \{0, (e^2-1)/2\}$.

(b) *D'après le cours, pour construire une base hilbertienne, il suffit de choisir une base de* $\operatorname{Ker} T_K$ *(ce qui est possible par séparabilité de L^2) et une base de* $\operatorname{Ker}(T_K - \lambda I)$ *où $\lambda = (e^2-1)/2$.*

Barème indicatif : Exercice 1 : 9 points, Exercice 2 : 11 points.