Université Paris Dauphine
Master 1 MMD
Analyse fonctionnelle approfondie

Corrigé du partiel du Mardi 30 octobre 2018.

Durée 2h.

Exercice 1. *Convergence uniforme sur les compacts.*

1. Soit $K = [a, b]$ où a, $b \in \mathbb{R}$ sont tels que $a < 0 < b$. Soit $\mathcal{F}$ une partie équicontinue de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$.

   (a) Soit $\eta > 0$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $u_1, \ldots, u_p \in [a, b]$ tels que $u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_p$ et
   $$K \subset \bigcup_{i=1}^{p} \left] u_i - \frac{\eta}{2}, u_i + \frac{\eta}{2} \right[.$$
   Montrer qu'on a alors forcément $|u_i - u_{i+1}| \leq \eta$ pour tout $i \in [\![1, p-1]\!]$.

   (b) La partie $\mathcal{F}$ est-elle uniformément équicontinue sur K ?

   (c) Montrer que si $\{f(0) : f \in \mathcal{F}\}$ est borné alors pour tout $x \in K$, l'ensemble $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ est relativement compact dans $\mathbb{R}$.

2. On définit l'application d sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par
   $$d(f, g) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \min \left(\sup_{|u| \leq n} |f(u) - g(u)|, 1 \right), \quad \forall f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

   (a) Montrer que d est bien définie et que c'est une distance.

   (b) Montrer que pour toute suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et toute $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a : $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers f pour d si et seulement si $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout compact de $\mathbb{R}$.

3. Soit $\mathcal{F}$ une partie équicontinue de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui est telle que l'ensemble $\{f(0), f \in \mathcal{F}\}$ soit borné.

   (a) Soit $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{F}$. Montrer qu'il existe une sous-suite $(f_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur $[-N, N]$ pour tout entier $N \in \mathbb{N}^*$.

   (b) En déduire que $\mathcal{F}$ est relativement compacte dans $(\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), d)$.

4. Soient $\alpha > 0$ et $C > 0$. Soit $\mathcal{F}$ une partie de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que
   $$\mathcal{F} \subset \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \forall\, x, y \in \mathbb{R},\ |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^{\alpha}\}$$
   et telle que l'ensemble $\{f(0), f \in \mathcal{F}\}$ soit borné. Montrer que de toute suite de $\mathcal{F}$, on peut extraire une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Solution.

1. (a) *L'ensemble K étant compact, il est précompact. On peut donc le recouvrir par un nombre fini p de boules ouvertes de rayon η et de centres u_i pour $1 \leq i \leq p$. Quitte à réordonner les centres de ces boules, on obtient le résultat voulu.*

   On a alors forcément $|u_i - u_{i+1}| \leq \eta$ pour tout $i \in [\![1, p-1]\!]$. En effet, si ce n'était pas le cas, il existerait $j \in [\![1, p-1]\!]$ pour lequel $|u_j - u_{j+1}| > \eta$. On pourrait alors trouver un point $x \in K$ tel que $x \notin]u_j - \eta/2, u_j + \eta/2[\cup]u_{j+1} - \eta/2, u_{j+1} + \eta/2[$ puisqu'on aurait

$$\left|u_{j+1} - \frac{\eta}{2} - \left(u_j + \frac{\eta}{2}\right)\right| = |u_{j+1} - u_j - \eta| \geq |u_{j+1} - u_j| - \eta > 0.$$

   Alors, puisque les points $u_1, \ldots, u_p$ sont ordonnés, on aurait $x \in K \setminus \bigcup_{i=1}^{p} \left]u_i - \frac{\eta}{2}, u_i + \frac{\eta}{2}\right[$, ce qui est absurde.

   (b) *La partie $\mathcal{F}$ étant équicontinue sur un compact, elle y est uniformément équicontinue d'après le cours.*

   (c) *D'après la question précédente, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout x, $y \in K$, si $|x - y| \leq \eta$ alors pour tout $f \in \mathcal{F}$, on a $|f(x) - f(y)| \leq 1$. D'après la question 1.(a), il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $u_1, \ldots, u_p \in [a, b]$ tels que $u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_p$ et*

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{p} \left]u_i - \frac{\eta}{2}, u_i + \frac{\eta}{2}\right[.$$

   De plus, $|u_i - u_{i+1}| \leq \eta$ pour tout $i \in [\![1, p-1]\!]$.

   Soit maintenant $x \in K$. Comme $\mathbb{R}$ est de dimension finie, dire que $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ est relativement compact est équivalent à dire que $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ est borné. D'après ce qui précède, il existe $i, j \in [\![1, p]\!]$ tels que

$$x \in]u_i - \eta/2, u_i + \eta/2[\quad \text{et} \quad 0 \in]u_j - \eta/2, u_j + \eta/2[.$$

   On suppose par exemple que $i \leq j$. On a alors pour tout $f \in \mathcal{F}$:

$$\begin{aligned} &|f(x)| \\ &\quad \leq \left|f(x) - f\left(u_i + \frac{\eta}{2}\right)\right| + \left|f\left(u_i + \frac{\eta}{2}\right) - f\left(u_{i+1} + \frac{\eta}{2}\right)\right| + \cdots + \left|f\left(u_j - \frac{\eta}{2}\right) - f(0)\right|. \end{aligned}$$

   Tous les termes sont majorés par 1 d'après la question 1.(a) et d'après la définition de η, et il y en a au plus p. On en conclut que $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ est borné par p.

2. (a) *L'application d est bien définie car le terme général de la série est majoré par 2^{-n} qui est le terme général d'une série convergente. La symétrie et la positivité sont évidentes. Supposons maintenant que $d(f, g) = 0$ pour f, $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. La série considérée est à termes positifs, si elle est nulle, cela implique que tous ses termes sont nuls c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(\sup_{|u| \leq n} |f(u) - g(u)|\right) \wedge 1 = 0$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$\sup_{|u|\leq n} |f(u) - g(u)| = 0$ et donc $f = g$ sur $\mathbb{R}$. Enfin, pour l'inégalité triangulaire, pour toutes fonctions f, g, $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on remarque que

$$\sup_{|u|\leq n} |f(u) - g(u)| \leq \sup_{|u|\leq n} |f(u) - h(u)| + \sup_{|u|\leq n} |h(u) - g(u)|$$

et donc

$$\left(\sup_{|u|\leq n} |f(u) - g(u)|\right) \wedge 1 \leq \left(\sup_{|u|\leq n} |f(u) - h(u)|\right) \wedge 1 + \left(\sup_{|u|\leq n} |h(u) - g(u)|\right) \wedge 1,$$

ce qui nous permet de conclure que $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$.

(b) *Commençons par le sens direct. On suppose que $d(f_k, f) \to 0$ lorsque $k \to +\infty$. Soit K un compact de $\mathbb{R}$. Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset [-N, N]$. On a*

$$\left(\sup_{u\in K} |f_k(u) - f(u)|\right) \wedge 1 \leq \left(\sup_{u\in[-N,N]} |f_k(u) - f(u)|\right) \wedge 1 \leq 2^N d(f_k, f).$$

On en déduit que

$$\left(\sup_{u\in K} |f_k(u) - f(u)|\right) \wedge 1 \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 \quad \text{et donc} \quad \sup_{u\in K} |f_k(u) - f(u)| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

Inversement, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2^{-n} \left(\sup_{u\in[-n,n]} |f_k(u) - f(u)|\right) \wedge 1 \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{-n} \left(\sup_{u\in[-n,n]} |f_k(u) - f(u)|\right) \wedge 1 \leq 2^{-n}$ qui est le terme général d'une série convergente. Donc par convergence dominée, on en déduit que

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty} d(f_k, f) &= \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \left(\sup_{|u|\leq n} |f_k(u) - f(u)|\right) \wedge 1 \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{k\to+\infty} 2^{-n} \left(\sup_{|u|\leq n} |f_k(u) - f(u)|\right) \wedge 1 = 0.\end{aligned}$$

3. (a) *Soient $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{F}$ et $N \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 1.(c), si $\{f(0), f \in \mathcal{F}\}$ est borné alors pour tout $x \in [-N, N]$, $\{f(x), f \in \mathcal{F}\}$ est relativement compact dans $\mathbb{R}$. De plus, $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est équicontinue dans $\mathcal{C}([-N, N], \mathbb{R})$ puisque $\mathcal{F}$ est une famille équicontinue de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Donc d'après le théorème d'Ascoli (appliqué dans $\mathcal{C}([-N, N], \mathbb{R})$), il existe une sous-suite $(f_{\varphi_N(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur $[-N, N]$. Par le procédé diagonal de Cantor, il existe une extraction φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $(f_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[-N, N]$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$.*

(b) *Dire que $\mathcal{F}$ est relativement compact dans $(\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}), d)$ est équivalent à dire que de toute suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{F}$, on peut extraire une sous-suite $(f_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge pour la distance d. D'après la question 2.(b), c'est équivalent à dire que de toute suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{F}$, on peut extraire une sous-suite $(f_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.*

Soit donc $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{F}$. D'après la question précédente, il existe une sous-suite $(f_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur $[-N,N]$ pour tout $N\in\mathbb{N}^*$. Soit maintenant K un compact de $\mathbb{R}$, il existe $N\in\mathbb{N}^*$ tel que $K\subset[-N,N]$. Alors d'après ce qui précède, $(f_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une certaine fonction $f\in\mathcal{C}([-N,N],\mathbb{R})$ sur $[-N,N]$. De plus,

$$\sup_{u\in K}|f_{\varphi(k)}(u)-f(u)|\leq\sup_{u\in[-N,N]}|f_{\varphi(k)}(u)-f(u)|\xrightarrow[k\to+\infty]{}0.$$

Donc $(f_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur K.

4. *D'après la question 2, il suffit de montrer que $\mathcal{F}$ est relativement compacte dans $(\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}), d)$. Pour cela, d'après la question 3, il suffit de vérifier que $\mathcal{F}$ est équicontinue sur $\mathbb{R}$ (on va même montrer que $\mathcal{F}$ est uniformément équicontinue sur $\mathbb{R}$). Soit $\varepsilon>0$. On pose $\eta=(\varepsilon/C)^{1/\alpha}$. On a alors pour tous x, $y\in\mathbb{R}$ tels que $|x-y|\leq\eta$ et pour toute $f\in\mathcal{F}$, $|f(x)-f(y)|\leq C\eta^\alpha=\varepsilon$.*

Exercice 2. *Un théorème de point fixe.* Soit H un espace de Hilbert. On note $\langle\cdot,\cdot\rangle$ son produit scalaire et $\|\cdot\|$ sa norme associée. Soit C un convexe fermé non vide de H.

1. On rappelle le théorème de séparation suivant : si C est sous-ensemble convexe fermé non vide de H et $x\notin C$, alors il existe $z\in H$ tel que $\sup_{y\in C}\langle y,z\rangle < \langle x,z\rangle$.
   Montrer que si C est un convexe fermé de H, alors C est séquentiellement fermé pour la convergence faible.

Soit une application $T: C\to H$ telle que

$$\|T(v)-T(w)\|\leq\|v-w\|,\quad\forall\, v,w\in C.$$

2. Dans cette question, on suppose que $C=H$.

   (a) Montrer que
   $$\langle(v-T(v))-(w-T(w)), v-w\rangle\geq 0,\quad\forall\, v,w\in H.$$

   (b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de H telle que $u_n\rightharpoonup u$ et $u_n-T(u_n)\to f$ avec u, $f\in H$.

   i) Montrer que
   $$\langle f-(w-T(w)), u-w\rangle\geq 0,\quad\forall\, w\in H.$$

   ii) En appliquant l'inégalité précédente à $w=u+tv$ pour $v\in H$ et $t>0$, montrer que
   $$\langle f-u-tv+T(u+tv), v\rangle\leq 0,\quad\forall\, t>0,\ \forall\, v\in H$$
   puis que
   $$\langle f-(u-T(u)), v\rangle\leq 0,\quad\forall\, v\in H.$$

iii) En déduire que $u - T(u) = f$.

3. À partir de cette question, on ne suppose plus que $C = H$.

   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de C telle que $u_n \rightharpoonup u$ et $u_n - T(u_n) \to f$ avec $u,\ f \in H$. Montrer que l'on a encore $u - T(u) = f$.

   (Pour cela, on pourra considérer l'application $S = T \circ P_C$ où P_C est l'opérateur de projection sur C. On rappelle que $P_C : H \to C$ est tel que pour tout $x \in H$, $\|x - P_C(x)\| = d(x, C)$ et que P_C est une application 1-lipschitzienne.)

4. Dans cette question, on suppose que $T(C) \subset C$ et que C est borné.

   (a) Soit $a \in C$ fixé. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit l'application T_n par

   $$\begin{array}{rccc} T_n & : & C & \longrightarrow & C \\ & & u & \longmapsto & (1 - 2^{-n})\, T(u) + 2^{-n} a. \end{array}$$

   Montrer que T_n est bien définie et que T_n admet un point fixe dans C que l'on notera u_n.

   (b) Montrer que $u_n - T(u_n) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

   (c) Montrer que T admet un point fixe.

Solution.

1. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de C qui converge faiblement vers un point $x \in H$. On va montrer par l'absurde que $x \in C$. Supposons donc que $x \notin C$. D'après le théorème de séparation donné dans l'énoncé, il existe $z \in H$ tel que $\sup_{y\in C}\langle y, z\rangle < \langle x, z\rangle$. Donc en particulier, on a $\sup_{n\in\mathbb{N}}\langle x_n, z\rangle < \langle x, z\rangle$. On en déduit que*

   $$\lim_{n\to+\infty} \langle x_n, z\rangle = \langle x, z\rangle < \langle x, z\rangle,$$

   ce qui est absurde.

2. (a) *Soient $v,\ w \in H$. On a :*

   $$\langle (v - T(v)) - (w - T(w)), v - w\rangle = \|v - w\|^2 - \langle T(v) - T(w), v - w\rangle.$$

   En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que T soit 1-lipschitzienne sur H, on obtient :

   $$\langle T(v) - T(w), v - w\rangle \leq \|T(v) - T(w)\|\|v - w\| \leq \|v - w\|^2,$$

   ce qui implique l'inégalité voulue.

   (b) i) *Soit $w \in H$. D'après la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

   $$\langle (u_n - T(u_n)) - (w - T(w)), u_n - w\rangle \geq 0.$$

   On a $u_n - T(u_n) \to f$ et $u_n \rightharpoonup u$ donc d'après le cours,

   $$\langle u_n - T(u_n), u_n\rangle \to \langle f, u\rangle.$$

D'autre part, le fait que $u_n \rightharpoonup u$ *implique que* $\langle w - T(w), u_n\rangle \to \langle w - T(w), u\rangle$ *et le fait que* $u_n - T(u_n) \to f$ *implique que* $\langle u_n - T(u_n), w\rangle \to \langle f, w\rangle$*. Donc finalement, en passant à la limite dans la première inégalité, on obtient :*

$$\langle f, u\rangle - \langle f, w\rangle - \langle w - T(w), u\rangle + \langle w - T(w), w\rangle \geq 0,$$

ce qui est l'inégalité voulue.

ii) Soient $v \in H$ *et* $t > 0$*. On pose* $w = u + tv$*. L'inégalité de la question précédente nous donne*

$$\langle f - (u + tv - T(u + tv)), u - (u + tv)\rangle = -t\langle f - u - tv + T(u + tv), v\rangle \geq 0.$$

En divisant cette inégalité par $t > 0$*, on obtient :*

$$\langle f - u - tv + T(u + tv), v\rangle \leq 0.$$

Puis, on fait tendre t *vers* 0 *dans cette inégalité. On a :*

$$\langle T(u + tv), v\rangle \to \langle T(u), v\rangle$$

car l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que T *soit* 1*-lipschitzienne donnent*

$$|\langle T(u + tv), v\rangle - \langle T(u), v\rangle| \leq \|T(u + tv) - T(u)\|\|v\| \leq t\|v\|^2 \to 0\,.$$

Le passage à la limite dans les autres termes est clair. On obtient donc :

$$\langle f - (u - T(u)), v\rangle \leq 0.$$

iii) En prenant $v = f - (u - T(u))$*, on obtient le résultat souhaité.*

3. *On pose* $S = T \circ P_C$ *qui est une application de* H *dans* H 1*-lipschitzienne par composition de deux applications* 1*-lipschitziennes. D'après la question précédente, on a alors* $u - S(u) = f$*. Or comme* $u \in C$ *d'après la question 1, on a* $P_C(u) = u$ *et donc* $S(u) = T(u)$*, d'où le résultat.*

4. *(a) Soit* $n \in \mathbb{N}$*. L'ensemble* C *étant stable par* T*, on a* $T(u) \in C$ *pour tout* $u \in C$*. On en déduit que* $T_n(u)$ *est une combinaison convexe d'éléments de* C *qui est convexe. Donc* T_n *est bien à valeurs dans* C*. Par ailleurs,* C *est fermé dans* H *qui est complet donc* C *est lui-même complet. De plus, on a pour tous* v*,* $w \in C$*,*

$$\|T_n(v) - T_n(w)\| = (1 - 2^{-n})\|T(v) - T(w)\| \leq (1 - 2^{-n})\|v - w\|,$$

donc T_n *est une application contractante. D'après le théorème de point fixe de Picard, on en déduit qu'il existe un unique* $u_n \in C$ *tel que* $T_n(u_n) = u_n$*.*

(b) On a :

$$u_n - T(u_n) = u_n - T_n(u_n) + T_n(u_n) - T(u_n) = T_n(u_n) - T(u_n) = 2^{-n}(a - T(u_n)).$$

De plus, la suite $(T(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée car contenue dans* C *qui est lui-même borné. On en déduit que* $u_n - T(u_n) \to 0$*.*

(c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée donc il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et un point $u \in H$ tel que $u_{\varphi(n)} \rightharpoonup u$. D'autre part, d'après la question précédente, $u_{\varphi(n)} - T(u_{\varphi(n)}) \to 0$. D'après la question 3 appliquée à la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et à $f = 0$, on conclut que $u = T(u)$ et donc que T admet un point fixe.

Barème indicatif : Exercice 1 : 10 points, Exercice 2 : 10 points.