Université Paris Dauphine
Master 1 MMD
Analyse fonctionnelle approfondie

Examen du Lundi 14 janvier 2019.

Durée 2h.

Les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront être clairement énoncés. Dans tout le partiel, on pourra admettre le résultat d'une question pour traiter les questions suivantes et la difficulté des questions n'est pas forcément croissante.

Exercice 1. Dans cet exercice, on note $I = [0,1]$ et on considère des réels a, b tels que $0 < a < b < 1$. On considère une fonction $f \in L^2(I) \setminus \{0\}$. On définit la fonctionnelle J sur $H^1(I)$ par

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_0^1 (v'(t))^2 dt + \frac{1}{2}\left(\int_a^b v(t)\,dt\right)^2 + \int_0^1 f(t)v(t)\,dt, \quad \forall\, v \in H^1(I).$$

On s'intéresse au problème de calcul des variations suivant :

$$\min\{J(v), v \in H^1(I), v(0) = 0\}. \qquad (\mathcal{P})$$

1. Montrer que la fonctionnelle J est bien définie sur $H^1(I)$ et que $\inf\{J(v), v \in H^1(I), v(0) = 0\} \leq 0$.
2. (a) Montrer que pour tout $v \in H^1(I)$, on a :

$$\|v\|_{L^2(I)} \leq \|v'\|_{L^2(I)} + \frac{1}{b-a}\left|\int_a^b v(t)\,dt\right|.$$

Pour cela, on pourra utiliser le fait que tout élément v de $H^1(I)$ possède un représentant continu (noté encore v) qui vérifie

$$v(t) - v(s) = \int_s^t v'(\tau)\,d\tau, \quad \forall\,(t,s) \in I^2$$

et intégrer cette relation en s entre a et b.

(b) En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (v'(t))^2 dt + \frac{1}{2}\left(\int_a^b v(t)\,dt\right)^2 \geq C\|v\|^2_{H^1(I)}, \quad \forall\, v \in H^1(I).$$

Puis montrer qu'il existe une constante $C' > 0$ telle que

$$J(v) \geq C\|v\|^2_{H^1(I)} - C'\|v\|_{H^1(I)}, \quad \forall\, v \in H^1(I)$$

où la constante C est la même que dans l'inégalité précédente.

3. On considère une suite minimisante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ du problème $(\mathcal{P})$.

(a) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$C\|u_n\|^2_{H^1(I)} - C'\|u_n\|_{H^1(I)} - 1 \leq 0, \quad \forall\, n \geq N.$$

(b) Montrer qu'il existe $\bar{u} \in H^1(I)$ solution du problème $(\mathcal{P})$.

Exercice 2. Soit $K : [0,1]^2 \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ une application mesurable telle que

$$C(K) = \max\left(\sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |K(x,y)|\, dy,\ \sup_{y\in[0,1]} \int_0^1 |K(x,y)|\, dx \right) < +\infty.$$

Dans tout l'exercice, on note $L^2 = L^2([0,1])$. On définit une application $T_K : L^2 \to L^2$ par

$$T_K(f)(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y)\, dy, \quad \forall\, x \in [0,1].$$

1. Montrer que T_K est bien définie et que T_K est une application linéaire continue de L^2 dans L^2 de norme d'opérateur inférieure ou égale à $C(K)$.

   Pour cela, on pourra écrire que $|K(x,y)| = |K(x,y)|^{\frac{1}{2}}|K(x,y)|^{\frac{1}{2}}$.

2. Dans cette question, on suppose que $K : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ est continue sur $[0,1]^2$.

   (a) Montrer que pour $f \in L^2$, $T_K(f) \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.

   (b) Montrer que $T_K : L^2 \to L^2$ est un opérateur compact.

   Pour cela, on pourra utiliser le théorème d'Ascoli.

Les questions 3. et 4. peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

3. Dans cette question, on considère $\alpha \in]0,1[$ et on pose $K(x,y) = |x-y|^{-\alpha}$ pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$ tel que $x \neq y$ et $K(x,x) = +\infty$ pour tout $x \in [0,1]$.

   (a) Montrer que K ainsi définie vérifie bien $C(K) < +\infty$.

   (b) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K_n = \inf(K, n)$. Montrer que les $T_{K_n} : L^2 \to L^2$ sont compacts.

   (c) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a

   $$C(K - K_n) \leq \frac{2}{1-\alpha} n^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}}.$$

   (d) En déduire que l'opérateur $T_K : L^2 \to L^2$ est aussi compact.

4. Dans cette question, on pose $K(x,y) = e^{x+y}$ pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$.

   (a) Déterminer le spectre et les valeurs propres de T_K.

   (b) Expliquer comment construire une base hilbertienne de L^2 à partir des vecteurs propres de T_K.

Barème indicatif : Exercice 1 : 9 points, Exercice 2 : 11 points.