Université Paris Dauphine
Master 1 MMD
Analyse fonctionnelle approfondie

Partiel du Mardi 30 octobre 2018.

Durée 2h.

Les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront être clairement énoncés. Dans tout le partiel, on pourra admettre le résultat d'une question pour traiter les questions suivantes.

Exercice 1. *Convergence uniforme sur les compacts.*

1. Soit $K = [a, b]$ où a, $b \in \mathbb{R}$ sont tels que $a < 0 < b$. Soit $\mathcal{F}$ une partie équicontinue de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$.
   (a) Soit $\eta > 0$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $u_1, \ldots, u_p \in [a, b]$ tels que $u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_p$ et
   $$K \subset \bigcup_{i=1}^{p} \left] u_i - \frac{\eta}{2}, u_i + \frac{\eta}{2} \right[.$$
   Montrer qu'on a alors forcément $|u_i - u_{i+1}| \leq \eta$ pour tout $i \in [\![1, p-1]\!]$.
   (b) La partie $\mathcal{F}$ est-elle uniformément équicontinue sur K ?
   (c) Montrer que si $\{f(0) : f \in \mathcal{F}\}$ est borné alors pour tout $x \in K$, l'ensemble $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ est relativement compact dans $\mathbb{R}$.
2. On définit l'application d sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par
   $$d(f, g) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \min \left(\sup_{|u| \leq n} |f(u) - g(u)|, 1 \right), \quad \forall\, f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$
   (a) Montrer que d est bien définie et que c'est une distance.
   (b) Montrer que pour toute suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et toute $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a : $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers f pour d si et seulement si $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout compact de $\mathbb{R}$.
3. Soit $\mathcal{F}$ une partie équicontinue de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui est telle que l'ensemble $\{f(0), f \in \mathcal{F}\}$ soit borné.
   (a) Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{F}$. Montrer qu'il existe une sous-suite $(f_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur $[-N, N]$ pour tout entier $N \in \mathbb{N}^*$.
   (b) En déduire que $\mathcal{F}$ est relativement compacte dans $(\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), d)$.
4. Soient $\alpha > 0$ et $C > 0$. Soit $\mathcal{F}$ une partie de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que
   $$\mathcal{F} \subset \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \forall\, x, y \in \mathbb{R},\ |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^{\alpha}\}$$
   et telle que l'ensemble $\{f(0), f \in \mathcal{F}\}$ soit borné. Montrer que de toute suite de $\mathcal{F}$, on peut extraire une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Exercice 2. *Un théorème de point fixe.* Soit H un espace de Hilbert. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son produit scalaire et $\| \cdot \|$ sa norme associée. Soit C un convexe fermé non vide de H.

1. On rappelle le théorème de séparation suivant : si C est sous-ensemble convexe fermé non vide de H et $x \notin C$, alors il existe $z \in H$ tel que $\sup_{y \in C} \langle y, z \rangle < \langle x, z \rangle$.
   Montrer que si C est un convexe fermé de H, alors C est séquentiellement fermé pour la convergence faible.

Soit une application $T : C \to H$ telle que

$$\|T(v) - T(w)\| \leq \|v - w\|, \quad \forall\, v, w \in C.$$

2. Dans cette question, on suppose que $C = H$.
   (a) Montrer que
   $$\langle (v - T(v)) - (w - T(w)), v - w \rangle \geq 0, \quad \forall\, v, w \in H.$$
   (b) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de H telle que $u_n \rightharpoonup u$ et $u_n - T(u_n) \to f$ avec $u,\ f \in H$.
      i) Montrer que
      $$\langle f - (w - T(w)), u - w \rangle \geq 0, \quad \forall\, w \in H.$$
      ii) Montrer que
      $$\langle f - u - tv + T(u + tv), v \rangle \leq 0, \quad \forall\, t > 0,\ \forall\, v \in H$$
      puis que
      $$\langle f - (u - T(u)), v \rangle \leq 0, \quad \forall\, v \in H.$$
      iii) En déduire que $u - T(u) = f$.

3. À partir de cette question, on ne suppose plus que $C = H$.
   Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de C telle que $u_n \rightharpoonup u$ et $u_n - T(u_n) \to f$ avec $u,\ f \in H$. Montrer que l'on a encore $u - T(u) = f$.
   (Pour cela, on pourra considérer l'application $S = T \circ P_C$ où P_C est l'opérateur de projection sur C. On rappelle que $P_C : H \to C$ est tel que pour tout $x \in H$, $\|x - P_C(x)\| = d(x, C)$ et que P_C est une application 1-lipschitzienne.)

4. Dans cette question, on suppose que $T(C) \subset C$ et que C est borné.
   (a) Soit $a \in C$ fixé. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit l'application T_n par
   $$\begin{array}{rccc} T_n & : & C & \longrightarrow & C \\ & & u & \longmapsto & (1 - 2^{-n})\, T(u) + 2^{-n} a. \end{array}$$
   Montrer que T_n est bien définie et que T_n admet un point fixe dans C que l'on notera u_n.
   (b) Montrer que $u_n - T(u_n) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.
   (c) Montrer que T admet un point fixe.

Barème indicatif : Exercice 1 : 10 points, Exercice 2 : 10 points.