# TD n°1 : Compacité et théorème d'Ascoli

## Ensembles compacts

**Exercice 1.** Soit $(X, d)$ un espace métrique compact non vide et $f : X \to X$ une application vérifiant :

$$\forall\, x, y \in X,\ x \neq y, \qquad d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

Montrer que $f$ possède une unique point fixe.
[Indication : on pourra étudier la fonction $x \mapsto d(f(x), x)$.]

**Exercice 2.** Soit $(X, d)$ est un espace métrique compact non vide. On note

$$\mathrm{diam}(X) = \sup_{z,z' \in X} d(z, z').$$

1. Montrer que $\mathrm{diam}(X)$ est fini et qu'il existe $x, y \in X$ tels que $\mathrm{diam}(X) = d(x, y)$.
2. Montrer que, si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides de $X$, alors l'ensemble $F$ défini par $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est un compact non vide de $X$ et $\mathrm{diam}(F) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{diam}(F_n)$.
3. Si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est suite décroissante de fermés d'un espace complet, $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est-il nécessairement non vide ?

**Exercice 3.** *Distance de Hausdorff.* Soit $(X, d)$ un espace métrique compact et $Y$ l'ensemble des sous-ensembles fermés non vides de $X$. On définit

$$\delta(A, B) = \max\left(\sup_{x\in A} d(x, B)\ ,\ \sup_{y\in B} d(y, A)\right) \qquad \forall\, A, B \in Y.$$

1. Montrer que $\delta$ est une distance sur $Y$.
2. Pour tout $C \in Y$, on note $C^r = \{x \in X : d(x, C) \leq r\}$. Montrer que

$$\delta(A, B) = \inf\{r > 0 : A \subset B^r \text{ et } B \subset A^r\} \qquad \forall\, A, B \in Y.$$

   [Indication : on pourra commencer par montrer que $\sup_{x\in A} d(x, B) = \inf\{r > 0 : A \subset B^r\}$.]
3. Soit $\varepsilon > 0$ et $x_1, \ldots, x_N \in X$ tels que la famille des boules fermées $(B(x_i, \varepsilon))_{i=1,\ldots,N}$ recouvre $X$. Montrer que $Y$ muni de la distance $\delta$ peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon $2\varepsilon$ dont le centre est un élément de $Y$ de la forme $B(x_{i_1}, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_{i_k}, \varepsilon)$, où $k \leq N$ et $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, N\}$.

   [Indication : pour tout $A \in Y$, on pourra considérer $I = \{i \in [\![1, N]\!] : d(x_i, A) \leq \varepsilon\}$ ainsi que $B = \cup_{i\in I} B(x_i, \varepsilon)$.]
4. Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de sous-ensembles fermés de $X$. Montrer qu'elle converge vers $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ pour la distance $\delta$.
5. Montrer que, si $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $Y$ pour $\delta$, alors $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (toujours pour $\delta$) vers $\bigcap_{n\geq 0} \overline{\bigcup_{p\geq n} K_p}$.
6. En déduire que $Y$ est compact pour $\delta$.

**Exercice 4.** Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de sous-ensembles d'un espace métrique $(X,d)$. On note

$$A_\infty = \left\{x \in X \mid \exists \text{ une extraction } \varphi \text{ de } \mathbb{N} \text{ dans } \mathbb{N} \text{ et } x_{\varphi(n)} \in A_{\varphi(n)} \text{ avec } x_{\varphi(n)} \to x\right\}.$$

En s'inspirant du procédé diagonal de Cantor, montrer que $A_\infty$ est fermé.

## Théorème d'Ascoli

**Exercice 5.** Soient $E, F$ des espaces normés et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications équicontinue de $E$ dans $F$. Montrer que l'ensemble des $x \in E$, pour lesquels $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $F$, est un fermé.

**Exercice 6.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue et bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit $f_n(x) = f(x-n)$. Montrer que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue et bornée, mais n'est pas nécessairement relativement compacte pour la norme uniforme sur $\mathbb{R}$. Qu'en est-il si on considère la restriction à $[0,1]$ des fonctions $f_n$ ?

**Exercice 7.** Soit $E$ un sous-ensemble borné de $L^1([0,1])$ et $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que l'ensemble de fonctions $F = \left\{x \mapsto \int_0^1 k(x,y)u(y)dy,\ u \in E\right\}$ est pré-compact dans $\mathcal{C}([0,1])$.

**Exercice 8.** Soient $(E,d)$ un espace métrique et $\mathcal{H}$ une famille équicontinue d'applications de $E$ dans $\mathbb{R}$. Pour $x \in E$, on note :

$$\mathcal{H}(x) = \{f(x),\ f \in \mathcal{H}\}.$$

Établir :

1. L'ensemble $A = \{x \in E : \mathcal{H}(x) \text{ est borné}\}$ est ouvert et fermé.
2. Si $E$ est compact et connexe et si $\mathcal{H}(x_0)$ est borné pour un point quelconque $x_0 \in E$, alors $\mathcal{H}$ est relativement compact dans $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$.

**Exercice 9.** On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n(t) = \sin(\sqrt{t + 4(n\pi)^2})$ sur $\mathbb{R}^+$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer qu'il s'agit d'une suite de fonctions équicontinue convergeant simplement vers $f \equiv 0$.
2. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle relativement compacte dans $(\mathcal{C}([0,\infty[), \|.\|_\infty)$ ? Que dit le théorème d'Ascoli ?

**Exercice 10.** *Théorèmes de Dini.*

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement en croissant vers une fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f$ sur $[0,1]$. Le résultat persiste-t-il si on ne suppose pas $f$ continue ?

   [Indication : on pourra considérer les ensembles $\Omega_n = \{x \in [0,1] : f_n(x) > f(x) - \varepsilon\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.]

2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues croissantes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f$ sur $[0,1]$. Le résultat persiste-t-il si on ne suppose pas $f$ continue ?

   [Indication : on pourra commencer par remarquer que $f$ est en fait uniformément continue sur $[0,1]$.]

3. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie sur $[0,1]$ par récurrence par :

$$P_0(x) = 0 \quad \text{et} \quad P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - (P_n(x))^2), \quad \forall\, n \geq 1.$$

   Vérifier que $0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$ pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0,1]$.

**Exercice 11.** *Un compact de* $\mathcal{C}^\infty([0,1])$. On munit l'ensemble $X = \mathcal{C}^\infty([0,1])$ de la distance

$$d(f,g) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\min\{1, \|f^{(n)} - g^{(n)}\|_\infty\}}{2^n} \qquad \forall\, f,g \in X.$$

1. Montrer que, pour tout suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $X$ et pour tout $f \in X$, on a $d(f_k, f) \to 0$, si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\big(f_k^{(n)}\big)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $f^{(n)}$ uniformément sur $[0,1]$.
2. Vérifier que $d$ est bien une distance sur $X$ et que $X$ est complet pour $d$.
3. Montrer que, pour tout $M > 0$, l'ensemble $E_M = \{f \in X : \|f^{(n)}\|_\infty \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}\}$ est compact pour la distance $d$.

**Exercice 12.** Soit $E$ un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{C}([0,1])$ dont tous les éléments sont de classe $\mathcal{C}^1$.

1. En utilisant le théorème du graphe fermé, montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $\|f'\|_\infty \leq M\|f\|_\infty$ pour tout $f \in E$.
2. En déduire que $E$ est de dimension finie.