TD n°2 : Convergence faible

Exercice 1. 1. Déterminer si les suites de fonctions suivantes convergent fortement ou faiblement dans $L^2([0,1])$:

$$a_n(x) = \frac{n^2}{n^2 + x^2}, \qquad b_n(x) = \cos(2\pi n x), \qquad c_n(x) = \sqrt{n}e^{-nx}.$$

2. Déterminer si les suites de fonctions suivantes convergent fortement ou faiblement dans $L^2(\mathbb{R})$:

$$d_n(x) = \frac{1}{1 + n^2x^2}, \qquad e_n(x) = \sqrt{n}e^{-(nx)^2}.$$

Exercice 2. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\tau_n f$ la fonction de $L^2(\mathbb{R})$ définie par $\tau_n f(x) := f(x-n)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $(\tau_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0 dans $L^2(\mathbb{R})$.
2. On suppose que $(\tau_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers 0. Que vaut f ?

Exercice 3. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, non nulle, à support compact. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\phi_n(x) := \sqrt{n}\phi(nx)$. Montrer que $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend faiblement vers 0 dans $L^2(\mathbb{R})$ mais pas fortement.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $1-$périodique (i.e. $f(x+1) = f(x)$ p.p.) et de carré localement intégrable (i.e. ici, $\int_0^1 f^2(x)\,dx < +\infty$). On pose $f_n(x) := f(nx)$ et $\bar{f} := \int_0^1 f(y)\,dy$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue à support compact.
   (a) Montrer que la suite de fonctions $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\phi_n(x) := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\phi\left(\frac{x+k}{n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$ converge uniformément vers $\int_0^1 \phi(y)\,dy$ sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}$.
   (b) Si $\int_0^1 \phi(y)\,dy \neq 0$, la convergence peut-elle être uniforme sur $\mathbb{R}$?
   (c) Montrer que
   $$\int_0^1 \phi(x)f_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \bar{f}\int_0^1 \phi(x)\,dx.$$
2. Conclure que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $\bar{f}$ dans $L^2([0,1])$.

Exercice 5. Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie.

1. Montrer qu'il existe une famille orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H.
2. Montrer que la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend faiblement vers 0 dans H.
   [Indication : on pourra montrer que, pour tout $x \in H$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\langle e_n, x\rangle^2 < +\infty$.]

3. En déduire que l'adhérence séquentielle faible de la sphère unité de H est la boule unité fermée de H.

Exercice 6. *Métrisabilité de la convergence faible.* Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie. On suppose que H possède une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ c'est-à-dire une famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est orthonormée et totale (c'est-à-dire que l'espace $\text{Vect}\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans H).

1. On veut montrer qu'il n'existe pas de distance sur H qui métrise la convergence faible. Supposons que ce soit le cas, c'est-à-dire qu'il existe une distance d sur H telle que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H et tout point x de H, on ait :

$$x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow d(x_n, x) \to 0.$$

   (a) Montrer qu'il existe une extraction φ telle que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $d(0, me_{\varphi(m)}) \leq 1/m$. [Indication : on pourra utiliser la question 2 de l'exercice 5.]

   (b) Conclure.

2. Soit B la boule unité fermée de H. On définit sur $B \times B$ la fonction d par :

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}|\langle x - y, e_n\rangle|, \quad \forall\, x, y \in B.$$

   (a) Montrer que d est bien définie et est une distance sur B.

   (b) Montrer que si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de B qui converge faiblement vers un point x de H, alors $x \in B$ et $d(x_k, x) \to 0$.

   (c) Inversement, montrer que si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ suite de B et $x \in B$ vérifient $d(x_k, x) \to 0$, alors $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x.
   [Indication : on poura commencer par montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\langle x_k, e_n\rangle \to 0$ lorsque $k \to +\infty$.]

Exercice 7. *Convergence faible et convexité.* On considère C un sous-ensemble d'un espace de Hilbert H.

1. On suppose que C est un demi-espace fermé de H, c'est-à-dire qu'il existe $z \in H$ et $c \in \mathbb{R}$ tel que $C = \{y \in H \mid \langle y, z\rangle \leq c\}$. Montrer que C est séquentiellement fermé pour la convergence faible.

2. On rappelle le théorème de séparation : si C est sous-ensemble convexe fermé non vide de H et $x \notin C$, alors il existe $z \in H$ tel que $\sup_{y\in C}\langle y, z\rangle < \langle x, z\rangle$.
   En déduire que si C est un convexe fermé de H, alors C est séquentiellement fermé pour la convergence faible.

Exercice 8. *Théorème de Banach-Saks.* Soit H un espace de Hilbert et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui tend faiblement vers 0 dans H.

1. Montrer qu'il existe une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\langle x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(m)} \rangle \leq 1/n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $0 \leq m < n$.

2. Montrer alors que la suite $\left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x_{\varphi(n)} \right)_{N \in \mathbb{N}^*}$ tend fortement vers 0 lorsque $N \to +\infty$.

3. Plus généralement, si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite qui tend faiblement vers x dans H, montrer qu'il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la suite $(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x_{\varphi(n)})_{N \in \mathbb{N}^*}$ tend fortement vers x lorsque $N \to +\infty$.