TD n°3 : Calcul des variations

Exercice 1. Pour α, $\beta \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $u_{\alpha,\beta}(t) := t^\alpha |\ln(t)|^\beta$ sur $[0,1]$.

1. Montrer que $u_{\alpha,\beta} \in L^2([0,1])$ si et seulement si $\alpha > -1/2$ et $\beta > -1/2$.
2. En déduire que si $\alpha > 1/2$ et $\beta > 1/2$, $u_{\alpha,\beta} \in H^1([0,1])$.

Exercice 2. On définit sur $H^1([0,1])$ les produits scalaires

$$\langle u, v\rangle_1 = u(0)v(0) + \int_0^1 u'(s)v'(s)\, ds$$

et

$$\langle u, v\rangle_2 = \int_0^1 \big(u(s)v(s) + u'(s)v'(s)\big)\, ds.$$

Montrer que les normes associées sont équivalentes.

Exercice 3.

1. Soit $u \in H^1([0,1])$ et $v \in \mathcal{C}^1(]0,1[)$ bornée et de dérivée bornée sur $]0,1[$. Montrer que $uv \in H^1([0,1])$ et que sa dérivée au sens faible est donnée par

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

2. Soient $u \in H^1([0,1])$ et $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction à dérivée bornée.
   (a) Montrer que $G \circ u \in L^2$.
   (b) Par densité, il existe une suite de fonctions $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de classe $\mathcal{C}^1$ qui converge vers u dans H^1. Montrer que $G \circ u_k$ converge vers $G \circ u$ dans L^2.
   (c) Montrer que $(G' \circ u_k)u_k'$ converge vers $(G' \circ u)u'$ dans L^2.
   (d) Montrer que $G \circ u \in H^1([0,1])$ et sa dérivée au sens faible est donnée par

$$(G \circ u)' = (G' \circ u)u'.$$

Exercice 4.

1. Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, l'application $e_t : H^1([0,1]) \to \mathbb{R}$ définie par $e_t(u) = u(t)$ pour tout $u \in H^1([0,1])$ est une forme linéaire continue.
2. En déduire que pour tout $t \in [0,1]$, il existe un élément $v_t \in H^1([0,1])$, que l'on déterminera, tel que

$$u(t) = u(0)v_t(0) + \int_0^1 u'(s)v_t'(s)\, ds, \qquad \forall\, u \in H^1([0,1]).$$

3. Montrer qu'il existe un élément $v \in H^1([0,1])$, que l'on déterminera, tel que

$$\int_0^1 u(s)\, ds = u(0)v(0) + \int_0^1 u'(s)v'(s)\, ds, \qquad \forall\, u \in H^1([0,1]).$$

Exercice 5. On rappelle que $H_0^1([0,1])$ est le sous-espace vectoriel fermé de $H^1([0,1])$ constitué des éléments x de $H^1([0,1])$ tels que $x(0)=x(1)=0$. On considère le problème

$$I := \min\left\{\int_0^1 (x'(t))^2 dt \text{ avec } x\in H_0^1([0,1]),\ \int_0^1 (x(t))^2 dt = 1\right\}.$$

1. Montrer que le problème possède au moins une solution. On note x une telle solution.
2. Montrer que l'application
$$\Phi(y) = \frac{\int_0^1 (y'(t))^2 dt}{\int_0^1 (y(t))^2 dt}$$
est définie et différentiable dans un voisinage de x dans $H_0^1([0,1])$.
3. Montrer que
$$I = \inf\left\{\Phi(y) \text{ avec } y\in H_0^1([0,1]),\ y\neq 0\right\}$$
et que l'infimum du problème de droite est atteint en x.
4. Calculer la diférentielle de Φ en x et en déduire que
$$\int_0^1 x'(t)h'(t)\,dt - \int_0^1 (x'(t))^2\,dt \int_0^1 x(t)h(t)\,dt = 0, \quad \forall\, h\in H_0^1([0,1])\setminus\{0\}.$$
5. Montrer alors que $x'\in H^1([0,1])$ et que
$$(x')'(t) = -\lambda x(t) \text{ p.p.} \qquad \text{où} \quad \lambda = \int_0^1 (x'(t))^2\,dt.$$
6. En déduire que x est de classe au moins $\mathcal{C}^2$ et le calculer.

Exercice 6. On rappelle que $H_0^1([0,1])$ est le sous-espace vectoriel fermé de $H^1([0,1])$ constitué des éléments de $H^1([0,1])$ tels que $x(0)=x(1)=0$. On considère le problème

$$I := \sup\left\{\int_0^1 x(t)dt \text{ avec } x\in H_0^1([0,1]),\ \int_0^1 (x'(t))^2\,dt \leq 1\right\}.$$

1. Montrer que $I>0$.
2. Montrer que le problème possède au moins une solution.
3. Vérifier que si x est une solution, alors $\displaystyle\int_0^1 (x'(t))^2\,dt = 1$.
4. Montrer alors que la solution est unique. On note x cette solution.
5. Soit $h\in H_0^1([0,1])$. Soit $\Phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ définie par
$$\Phi(a,b) := \left(\int_0^1 ax(t)+bh(t)\ dt\ ,\ \int_0^1 (ax'(t)+bh'(t))^2\ dt\right) \qquad (a,b)\in\mathbb{R}^2.$$

(a) Expliquer pourquoi Φ ne peut pas être une bijection d'un voisinage de $(1,0)$ dans un voisinage de $\big(\int_0^1 x(t)\,dt, \int_0^1 (x'(t))^2\,dt\big)$.

(b) Déduire du théorème d'inversion locale que la différentielle de Φ en $(1,0)$ n'est pas inversible et donc que

$$\lambda \int_0^1 x'(t)h'(t)\,dt = \int_0^1 h(t)\,dt \qquad \text{où} \qquad \lambda = \int_0^1 x(t)\,dt = I.$$

(c) En déduire que $x' \in H^1$ avec $(x')' = -\lambda^{-1}$ p.p.

(d) En conclure que x est de classe au moins $\mathcal{C}^2$ et le calculer.

Exercice 7. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $I = [0,1]$. Dans la suite de l'exercice, on note L^2 et H^1 pour $L^2(I)$ et $H^1(I)$ respectivement. On rappelle l'inégalité de Poincaré :

$$\|x\|_{L^2} \leq \|x'\|_{L^2}, \quad \forall\, x \in H^1 \text{ avec } x(0) = 0.$$

On considère le problème de calcul des variations suivant :

$$\inf\{J(x),\, x \in H^1,\, x(0) = 0\} \quad \text{où} \quad J(x) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}|x'(t)|^2 + g(x(t))\right) dt. \tag{$\star$}$$

1. Dans cette question seulement, on suppose que $g(s) = -\theta s^2$ où $\theta > 0$ est une constante fixée.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $y_n : I \to \mathbb{R}$ par:

   $$y_n(t) = \begin{cases} nt & \text{si } t \in]0,1/2] \\ n(1-t) & \text{si } t \in]1/2,1[. \end{cases}$$

   Montrer que $y_n \in H^1$.

   (b) Calculer $J(y_n)$ et en déduire qu'il existe $\theta_0 > 0$ tel que pour tout $\theta \geq \theta_0$, le problème $(\star)$ n'admet pas de solution.

   Dans toute la suite, on suppose que g vérifie la propriété suivante : il existe $C > 0$ et $\theta \in]0,1/2[$ tels que

   $$g(s) \geq -C - \theta s^2, \quad \forall\, s \in \mathbb{R}.$$

2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite minimisante du problème $(\star)$. Montrer que $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^2.

3. En déduire qu'il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $x \in H^1$ tels que $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers x sur $[0,1]$ et $(x'_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x' dans L^2.

4. En déduire que le problème $(\star)$ admet un minimum.

   On suppose à partir de maintenant que g est de classe $\mathcal{C}^1$. On fixe x un minimum du problème $(\star)$ et on admet que $J : H^1 \to \mathbb{R}$ est différentiable en x avec

   $$J'(x)(v) = \int_0^1 \big(x'(t)v'(t) + g'(x(t))v(t)\big)\,dt, \quad \forall\, v \in H^1.$$

5. Montrer que

$$\int_0^1 \big(x'(t)v'(t) + g'(x(t))v(t)\big)\, dt = 0, \quad \forall\, v \in H^1 \text{ avec } v(0) = 0.$$

6. En déduire que x' est dans H^1 et calculer sa dérivée.

7. Conclure que x est une solution de classe $\mathcal{C}^2$ de l'équation

$$\begin{cases} x''(t) = g'(x(t)) & \text{si } t \in [0,1] \\ x(0) = x'(1) = 0. \end{cases}$$