TD n°4 : Opérateurs compacts

Dans tout le TD, H est un espace de Hilbert et $\mathcal{L}(H)$ désigne l'ensemble des applications linéaires continues de H dans H.

Exercice 1. Soit $K \in \mathcal{L}(H)$ compact et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge faiblement vers x dans H. Montrer que $(K(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers $K(x)$.
Inversement, montrer que si $K \in \mathcal{L}(H)$ est tel que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ faiblement convergente, $(K(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement, alors K est compact.

Exercice 2. Soit $K \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact. Rappelons que $K^* \in \mathcal{L}(H)$ est défini par

$$\langle K^*(x), y\rangle = \langle x, K(y)\rangle \qquad \forall\, x, y \in H.$$

On veut montrer que K^* est également un opérateur compact. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de H.

1. Soit E l'adhérence dans H de $K(B_1)$, où B_1 est la boule unité fermée de H. Montrer que la famille de fonctions $\phi_n : E \to \mathbb{R}$ définies par $\phi_n(y) = \langle x_n, y\rangle$ pour tout $y \in E$ et tout $n \in \mathbb{N}$ est équicontinue.
2. En déduire qu'elle admet une sous-suite $(\phi_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur E.
3. Montrer que, pour tout $(n, n') \in \mathbb{N}^2$,
$$\sup_{x\in E} \left|\phi_{\psi(n)}(x) - \phi_{\psi(n')}(x)\right| = \left\|K^*(x_{\psi(n)}) - K^*(x_{\psi(n')})\right\|.$$
4. Conclure.

Exercice 3. Soit $a : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ strictement positive sur $[0,1]$ et soit $b : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive. Rappelons que $H_0^1([0,1])$ est le sous-ensemble fermé de H^1 défini comme l'ensemble des $x \in H^1$ tels que $x(0) = x(1) = 0$. À tout $f \in L^2$, on associe l'unique $u \in H_0^1$ satisfaisant

$$\forall\, v \in H_0^1, \quad \int_0^1 \big[-(au')' + bu\big]v = \int_0^1 fv, \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

1. Montrer en utilisant le théorème de Lax-Milgram que u est bien défini de façon unique et que l'application $f \mapsto u$ est linéaire continue de L^2 dans H_0^1.
2. En déduire que $K : L^2 \to L^2$ qui à f associe $u := K(f)$ est compact et auto-adjoint.
3. Montrer qu'il existe une base hilbertienne de L^2 constituée de vecteurs propres de K.

Exercice 4. Soit $K \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact. On pose $T = I - K$. Montrer que

$$\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Ker}(T^*)^{\perp}.$$

Exercice 5. On suppose que H est un espace de Hilbert de dimension infinie. On rappelle qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est dit de rang fini si $\mathrm{Im}(T)$ est un espace vectoriel de dimension finie.

1. Montrer que, si C est un compact de H, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un espace vectoriel de dimension finie $F \subset H$ telle que
$$\sup_{x \in C} d(x, F) \leq \varepsilon.$$
2. En déduire que tout opérateur compact de H est la limite d'opérateurs de rang fini. [Indication : penser à la projection orthogonale.]
3. Inversement on suppose que $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'opérateurs de rang fini qui converge en norme vers un opérateur $K \in \mathcal{L}(H)$. Montrer que K est compact.

Exercice 6. Soit $\lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. On définit l'opérateur $T_\lambda : \ell^2 \to \ell^2$ par

$$T_\lambda((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2.$$

1. Montrer que T_λ est un opérateur linéaire continu.
2. Montrer que T_λ est compact, si et seulement si, la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
3. Déterminer les valeurs propres et le spectre de T_λ.

Exercice 7. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et soit $h : [0,1] \to [0,1]$ continue. On définit l'opérateur $A : E \to E$ par
$$A(f) = f \circ h \qquad \forall f \in E.$$

1. Montrer que A est une application linéaire continue et calculer $\|A\|$.
2. À quelle condition sur h l'opérateur A est-il compact ?

Exercice 8. Soit $H = L^2([0,1])$. On définit V sur H par

$$V(f)(t) = \int_0^t f(s)\, ds \qquad \forall\, f \in H,\ \forall\, t \in [0,1].$$

L'opérateur V est appelé l'opérateur de Volterra.

1. Montrer que V est une application linéaire continue de H dans H.
2. À l'aide du théorème d'Ascoli, montrer que V est un opérateur compact.
3. Montrer que V n'a pas de valeur propre.
4. Montrer que $\sigma(V) = \{0\}$.