Corrigé TD n°1.

Distributions et distributions tempérées

Exercice 1

1. a) L'ensemble $\mathcal{U}$ contient E et $\emptyset$.
L'ensemble $\mathcal{U}$ est stable par intersection : si $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$, alors $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$. En effet, pour tout $x \in U_1 \cap U_2$, puisque $x \in U_1$ et $x \in U_2$, il existe $r_1, r_2 > 0$ et $i_1^1, ..., i_{n_1}^1, i_1^2, ..., i_{n_2}^2$ tels que :

$$\{x' \in E \text{ tq } \forall\, k,\, p_{i_k^1}(x - x') < r_1\} \subset U_1,$$
$$\{x' \in E \text{ tq } \forall\, k,\, p_{i_k^2}(x - x') < r_2\} \subset U_2.$$

Alors, en posant $r = \min(r_1, r_2)$ et $\{j_1, ..., j_n\} = \{i_1^1, ..., i_{n_1}^1, i_1^2, ..., i_{n_2}^2\}$, on a :

$$\{x' \in E \text{ tq } \forall\, k,\, p_{j_k}(x - x') < r\} \subset U_1 \cap U_2.$$

De plus, l'union d'une famille de parties de $\mathcal{U}$ appartient encore à $\mathcal{U}$: si les $(U_i)_{i\in I}$ sont des éléments de $\mathcal{U}$, alors $V = \cup_i U_i$ est aussi un élément de $\mathcal{U}$. En effet, si $x \in V$, il existe i tel que $V \in U_i$. Il existe donc $r > 0$ et $i_1, ..., i_n$ dans I tels que :

$$\{x' \in E \text{ tq } \forall\, k,\, p_{i_k}(x - x') < r\} \subset U_i \subset V.$$

b) On va traiter seulement le cas de l'addition. Celui de la multiplication par un scalaire est similaire.
Soit U un ouvert de E. Soit $A \subset E \times E$ son antécédent par $+$. Montrons que A est ouvert.
Soit $(x, y) \in A$. Il faut montrer qu'il existe A_1 et A_2 des ouverts de E tels que $(x, y) \in A_1 \times A_2 \subset A$.
Puisque $x + y \in U$ et U est ouvert, il existe $r > 0$ et $i_1, ..., i_n$ dans I tels que :

$$\{z \in E \text{ tq } \forall\, k,\, p_{i_k}(x + y - z) < r\} \subset U. \tag{1}$$

Posons $A_1 = \{z \in E \text{ tq } \forall\, k,\, p_{i_k}(x - z) < r/2\}$ et $A_2 = \{z \in E \text{ tq } \forall\, k,\, p_{i_k}(y - z) < r/2\}$. Les ensembles A_1 et A_2 sont ouverts (cela se vérifie en utilisant l'inégalité triangulaire de p). De plus, $(x, y) \in A_1 \times A_2$. Enfin, $A_1 \times A_2 \subset A$ puisque, si $(z_1, z_2) \in A_1 \times A_2$:

$$\forall\, k, \qquad p_{i_k}(x + y - (z_1 + z_2)) \leq p(x - z_1) + p(y - z_2) < r/2 + r/2 = r$$

donc, par (1), $z_1 + z_2 \in U$.
c) Soient x et y deux éléments distincts de E. Montrons qu'il existe U_1, U_2 des ouverts disjoints tels que $x \in U_1$ et $y \in U_2$.
Par hypothèse, il existe $i \in I$ tel que $p_i(x - y) \neq 0$. Posons :

$$U_1 = \{z \in E \text{ tq } p_i(x - z) < p_i(x - y)/2\},$$
$$U_2 = \{z \in E \text{ tq } p_i(y - z) < p_i(x - y)/2\}.$$

Les ensembles U_1 et U_2 sont tous deux ouverts. Le premier contient x et l'autre y. Il faut montrer qu'ils sont disjoints.
Si $z \in U_1 \cap U_2$, alors $p_i(x - y) = p_i(x - z + z - y) \leq p_i(x - z) + p_i(z - y) < p_i(x - y)$. C'est absurde.
Donc U_1 et U_2 sont disjoints.

d) Supposons d'abord que q est continue. Alors $q^{-1}([0;1[)$ est un ouvert de E contenant 0. En appliquant la définition des ouverts donnée à la question a), pour le point $x = 0$, on obtient qu'il existe $r > 0$ et $i_1, ..., i_n \in I$ tels que, pour tout $x' \in E$.

$$(\forall\, k,\, p_{i_k}(x') < r) \quad \Rightarrow \quad q(x') < 1.$$

Alors, pour tout $x \in E$, $q(x) \leq \frac{1}{r} \sup_{1\leq k\leq n} p_{i_k}(x)$.
En effet, si $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ vérifie $\lambda \sup_{1\leq k\leq n} p_{i_k}(x) < r$, la définition de r et des i_k donne :

$$q(\lambda x) < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad q(x) < \frac{1}{\lambda}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} q(x) &\leq \inf \left\{ \frac{1}{\lambda} \text{ tq } \lambda > 0 \text{ et } \lambda \sup_{1\leq k\leq n} p_{i_k}(x) < r \right\} \\ &= \inf \left\{ \mu \text{ tq } \mu > 0 \text{ et } \frac{1}{r} \sup_{1\leq k\leq n} p_{i_k}(x) < \mu \right\} \\ &= \frac{1}{r} \sup_{1\leq k\leq n} p_{i_k}(x). \end{aligned}$$

Supposons maintenant $q \leq C \sup_{1\leq k\leq n} p_{i_k}$ et montrons que q est continue. Soit A un ouvert de $\mathbb{R}^+$. Montrons que $q^{-1}(A)$ est ouvert.
Soit $x \in q^{-1}(A)$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\mathbb{R}^+ \cap]q(x) - \varepsilon; q(x) + \varepsilon[\subset A$. Posons $r = \varepsilon/C$. Alors :

$$\begin{aligned} \{x' \in E \text{ tq } \forall\, k,\, p_{i_k}(x - x') < r\} &= \{x' \in E \text{ tq } C \sup_{1\leq k\leq n} p_{i_k}(x - x') < \varepsilon\} \\ &\subset \{x' \in E \text{ tq } q(x - x') < \varepsilon\} \\ &\subset \{x' \in E \text{ tq } |q(x) - q(x')| \leq q(x - x') < \varepsilon\} \\ &\subset q^{-1}(A). \end{aligned}$$

e) Si $x_k \to x_\infty$, alors, pour toute semi-norme continue p, comme p est continue et comme la soustraction est continue, $p(x_k - x_\infty) \to 0$ lorsque $k \to +\infty$.
Réciproquement, supposons que, pour toute semi-norme continue p, $p(x_k) \to p(x_\infty)$ lorsque $k \to +\infty$. Soit $U \in \mathcal{U}$ un ouvert contenant x_∞. Il faut montrer que $x_k \in U$ pour tout k assez grand.
Soient $r > 0$ et $i_1, ..., i_n \in I$ comme dans la définition de $\mathcal{U}$ (au point $x = x_\infty$). Pour tout $s \leq n$ et pour tout k assez grand, $p_{i_s}(x_\infty - x_k) < r$ (puisque $p_{i_s}(x_\infty - x_k) \to 0$ quand k tend vers $+\infty$). Donc $x_k \in U$ pour tout k assez grand.

2. a) Supposons d'abord la condition indiquée vérifiée et montrons que f_k tend vers f_∞.
D'après la question 1.e), il suffit de montrer que, pour toute semi-norme continue p, $p(f_k - f_\infty) \to 0$ lorsque $k \to +\infty$.
Pour tout i, la semi-norme p est continue sur $\mathcal{D}_{K_i}$ (ce n'est pas a priori évident puisqu'on n'a pas montré que la topologie induite sur $\mathcal{D}_{K_i}$ par la topologie de $\mathcal{D}$ coïncidait avec celle engendrée par les semi-normes $(p_{m,K_i})_{m\in\mathbb{N}}$). En effet, d'après la question 1.d), elle est majorée par $C \sup_{1\leq k\leq n} p_{i_k}$ où les p_{i_k} sont des éléments de $\mathcal{P}$. Chaque p_{i_k} est continue sur $\mathcal{D}_{K_i}$, donc majorée sur $\mathcal{D}_{K_i}$ (à nouveau par

1.d)) par une semi-norme de la forme $C_{i_k} \sup_{1\leq s\leq n_{i_k}} p_{s,K_i}$. La semi-norme p initiale est donc également majorée sur $\mathcal{D}_{K_i}$ par une fonction de la forme $C \sup_{1\leq s\leq N} p_{s,K_i}$. Toujours d'après 1.d), p est donc continue sur $\mathcal{D}_{K_i}$.
Puisque les f_k et f_∞ appartiennent à un même espace $\mathcal{D}_{K_i}$, puisque $f_k \to f_\infty$ dans $\mathcal{D}_{K_i}$ et puisque $p_{|\mathcal{D}_{K_i}}$ est continue, on a bien $p(f_k - f_\infty) \to 0$.
Inversement, supposons maintenant que f_k tend vers f_∞ et montrons que la condition voulue est vérifiée.
Montrons qu'il existe i tel que $f_k \in \mathcal{D}_{K_i}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Raisonnons par l'absurde. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que, pour tout k, $f_k \notin \mathcal{D}_{K_k}$.
Définissons :

$$\forall\, f \in \mathcal{D}, \qquad p(f) = \sum_{k\geq 0} 2^k \frac{\sup_{x\in\mathbb{R}^n - K_k} |f(x)|}{\sup_{x\in\mathbb{R}^n - K_k} |f_k(x)|}.$$

Cette fonction est bien définie car, pour toute $f \in \mathcal{D}$, seul un nombre fini de termes dans la somme ne sont pas nuls : si $f \in K_j$ pour un certain j, alors $\sup_{x\in\mathbb{R}^n - K_k} |f(x)| = 0$ pour tout $k \geq j$. De plus, pour tout k, $\sup_{x\in\mathbb{R}^n - K_k} |f_k(x)| > 0$, sinon cela signifie que f_k est nulle sur $\mathbb{R}^n - K_k$ et donc que $f_k \in \mathcal{D}_{K_k}$.
La fonction p est une semi-norme sur $\mathcal{D}$ (cela se vérifie en montrant que chaque terme de la somme est une semi-norme). Sa restriction à chaque $\mathcal{D}_{K_i}$ est majorée par $C_i p_{0,K_i}$ pour une certaine constante $C_i > 0$; la restriction est donc continue.
La semi-norme p appartient donc à la famille $\mathcal{P}$; elle est alors continue pour la topologie sur $\mathcal{D}$ définie par $\mathcal{P}$. Donc $p(f_k) \to p(f_\infty)$ lorsque $k \to +\infty$.
C'est absurde : pour tout k, $p(f_k) \geq 2^k \frac{\sup_{x\in\mathbb{R}^n - K_k} |f_k(x)|}{\sup_{x\in\mathbb{R}^n - K_k} |f_k(x)|} = 2^k$, donc $(p(f_k))_{k\in\mathbb{N}}$ n'est pas une suite convergente.
Il existe donc i tel que $f_k \in \mathcal{D}_{K_i}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Si on fixe j tel que $f_\infty \in \mathcal{D}_{K_j}$, alors $f_k \in \mathcal{D}_{K_{\max(i,j)}}$ pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. La première partie de la condition est démontrée.
En fixant i tel que dans la propriété à prouver, montrons que $f_k \to f_\infty$ dans $\mathcal{D}_{K_i}$. D'après la question 1.e), il suffit de montrer que, pour toute semi-norme continue p sur $\mathcal{D}_{K_i}$, $p(f_k - f_\infty) \to 0$. D'après la question 1.d), il suffit de le montrer pour les semi-normes de la forme p_{m,K_i} avec $m \in \mathbb{N}$.
Pour tout m, $q : g \to \sup_{|\alpha|\leq m} \|g^\alpha\|_\infty$ est une semi-norme continue sur $\mathcal{D}$ (pour tout k, sa restriction à $\mathcal{D}_{K_k}$ vaut p_{m,K_k} donc est continue). Puisque $f_k \to f_\infty$ dans $\mathcal{D}$, $q(f_k - f_\infty) \to 0$. Donc $p_{m,K_i}(f_k - f_\infty) = q(f_k - f_\infty) \to 0$.
b) Supposons par l'absurde que la topologie de $\mathcal{D}$ est engendrée par une distance d.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, fixons $f_k \in \mathcal{D}$ une fonction qui n'est pas à support dans K_k. La suite $(2^{-n} f_k)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$ (cela se vérifie à l'aide de la question précédente). Il existe donc n_k tel que $d(2^{-n_k} f_k, 0) \leq 2^{-k}$.
La suite $(2^{-n_k} f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge alors vers 0 au sens de la distance d. En revanche, elle ne vérifie par la condition de la question précédente. C'est absurde.

3. Soit $T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une forme linéaire. La fonction $f \to |T(f)|$ est une semi-norme. Si T est une distribution, c'est une semi-norme continue (comme composition de fonctions continues). Pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$, si on fixe $i \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset K_i$, alors la restriction de $|T|$ à K_i est continue. D'après la question 1.d), il existe donc $C > 0$ et n tel que :

$$\forall\, f \in \mathcal{D}_{K_i}, \qquad |T(f)| \leq C \sup_{1\leq k\leq n} p_{k,K_i}(f) = C p_{n,K_i}(f).$$

Si $\mathrm{Supp}(f) \subset K$, $p_{n,K_i}(f) = p_{n,K}(f)$ donc :

$$\forall\, f \in \mathcal{D} \text{ tq } \mathrm{Supp}(f) \subset K, \qquad |T(f)| \leq C p_{n,K}(f).$$

Réciproquement, supposons la condition vérifiée. D'après cette condition, $|L|$ est une semi-norme continue sur tout $\mathcal{D}_K$ (d'après la question 1.d)). C'est donc un élément de $\mathcal{P}$. En utilisant ce fait, on peut démontrer que T est continue de la même façon qu'à la question 1.d).

Exercice 2

1. a) C'est quasiment la même démonstration qu'à la question 3. de l'exercice 1.
b) Pour toute $f \in \mathcal{D}$, posons $T(f) = \sum_{k\geq 0} 2^k f(k, 0, ..., 0)$.
Cette forme linéaire est bien définie sur $\mathcal{D}$ puisque, si f appartient à $\mathcal{D}$, f est à support compact donc seulement un nombre fini de termes de la somme sont non-nuls. Elle est de plus continue car elle vérifie la propriété de la question 3. de l'exercice 1. C'est donc une distribution.
En revanche, elle ne se prolonge pas en une distribution tempérée. En effet, montrons qu'elle ne vérifie pas la condition de la question a).
Soit $g \in \mathcal{D}$ une fonction à support inclus dans $B_{\mathbb{R}^n}(0, 1)$, telle que $g(0) = 1$. Alors, en notant $g_k : x \to g(x - (k, 0, ..., 0))$, on a :

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \qquad T(g_k) = 2^k.$$

Pour tout $(m, s) \in \mathbb{N}^2$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} p_{m,s}(g_k) &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n, |\alpha|\leq m} (1 + \|x\|^s)|\partial^\alpha g(x - (k, 0, ..., 0))| \\ &= \sup_{|x-(k,0,...,0)|<1, |\alpha|\leq m} (1 + \|x\|^s)|\partial^\alpha g(x - (k, 0, ..., 0))| \\ &\leq \sup_{|x-(k,0,...,0)|<1, |\alpha|\leq m} (1 + (k+1)^s)|\partial^\alpha g(x - (k, 0, ..., 0))| \\ &= (1 + (k+1)^s) \sup_{x\in\mathbb{R}^n, |\alpha|\leq m} |\partial^\alpha g(x)|. \end{aligned}$$

Donc, quels que soient $m, s \in \mathbb{N}, C > 0$, $|T(g_k)| = 2^k > C p_{m,s}(g_k)$ pour tout k assez grand. On n'a donc pas :

$$|T| \leq C p_{m,s}.$$

2. a) On rappelle les égalités suivantes, valables pour toute fonction $f \in \mathcal{S}$ et tout indice $i \leq n$:

$$\mathcal{F}(\partial_i f)(\xi) = i\xi_i \mathcal{F}(f)(\xi), \qquad \mathcal{F}(x_i f) = i\partial_i(\mathcal{F} f).$$

Donc, pour toute $f \in \mathcal{S}$, tout $k \in \mathbb{N}$, tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^m$ et tout indice $i \leq n$, on a :

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \qquad |x_i|^k |\partial^\alpha(\mathcal{F} f)(x)| &= |x_i|^k |\mathcal{F}(x^\alpha f)|(x) \\ &= |\mathcal{F}(\partial_i^k (x^\alpha f))|(x). \end{aligned}$$

En développant (par la formule de Leibniz) $\partial_i^k(x^\alpha f)$, on en déduit que, pour une certaine constante C :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x_i|^k |\partial^\alpha(\mathcal{F} f)(x)| \leq C \sup_{x\in\mathbb{R}^n, s\leq k, |\gamma|\leq|\alpha|} |\mathcal{F}(x^\gamma \partial_i^s f)(x)| = C \sup_{s\leq k, |\gamma|\leq|\alpha|} \|\mathcal{F}(x^\gamma \partial_i^s f)\|_\infty.$$

Pour toute fonction $g \in \mathcal{S}$, $\|\mathcal{F}(g)\|_\infty \leq \|g\|_1$. De plus, $\|g\|_1 \leq D p_{S,0}(g)$ pour une certaine constante D bien choisie et pour S tel que $(1+\|x\|^S)^{-1}$ est intégrable. Donc :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x_i|^k |\partial^\alpha(\mathcal{F}f)(x)| \leq DC \sup_{s\leq k, |\gamma|\leq|\alpha|} p_{S,0}(x^\gamma \partial_i^s f) \leq \tilde{C} p_{S+|\alpha|,k}(f).$$

Cela implique que, pour tout k et pour tout m, si on choisit bien la constante $M > 0$, on a :

$$\forall\, f \in \mathcal{S}, \qquad p_{k,m}(\mathcal{F}f) \leq M p_{S+m,k}(f).$$

Concluons. Si $C > 0$ et $m, k \in \mathbb{N}$ sont tels que :

$$\forall\, f \in \mathcal{S}, \qquad |T(f)| \leq C p_{m,k}(f)$$

alors, pour toute $f \in \mathcal{S}$:

$$|\mathcal{F}T(f)| \leq C p_{m,k}(\mathcal{F}f) \leq M p_{S+k,m}(f).$$

Donc, d'après la question 1.a), $\mathcal{F}T$ est une distribution tempérée.
b) Pour toute $f \in \mathcal{S}$, $\mathcal{F}\delta_0(f) = (\mathcal{F}f)(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$.
La transformée de Fourier du dirac en 0 est donc la distribution $T_1 : f \to \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$.
c) Pour toute $f \in \mathcal{S}$:

$$\mathcal{F}T_g(f) = \int_{\mathbb{R}^n} g\mathcal{F}f = \int_{\mathbb{R}^n} f\mathcal{F}g = T_{\mathcal{F}g}(f)$$

donc $\mathcal{F}T_g = T_{\mathcal{F}(g)}$.

Espaces de Sobolev

Exercice 3

1. Puisque χ_k est $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact, il suffit de montrer que $\underline{f} \star \eta_k$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Par l'inégalité de Hölder, puisque f est dans L^p, la restriction de f (et donc de $\underline{f}$) à tout ouvert borné est L^1. Comme η_k est à support compact, cela entraîne qu'au voisinage de chaque point, $\underline{f} \star \eta_k$ s'écrit comme la convolution d'une fonction de L^1 et d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact. De telles fonctions sont $\mathcal{C}^\infty$ (c'est une conséquence du théorème de convergence dominée).

2. Par le théorème de convergence dominée, la dérivée α-ième de $\underline{f} \star \eta_k$ est $\underline{f} \star \eta_k^{(\alpha)}$.
Pour tout $x \in \omega$:

$$\begin{aligned}\underline{f} \star \eta_k^{(\alpha)}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \underline{f}(t)\eta_k^{(\alpha)}(x-t)dt \\ &= \int_\Omega f(t)\eta_k^{(\alpha)}(x-t)dt\end{aligned}$$

où la deuxième égalité est vraie seulement pour k assez grand : il faut que le support de $\eta_k^{(\alpha)}(x - .)$ soit inclus dans Ω. Puisqu'au sens des distributions, f est α-fois dérivable, on a, pour tout $x \in \omega$:

$$\underline{f} \star \eta_k^{(\alpha)}(x) = \int_\Omega f^{(\alpha)}(t)\eta_k(x-t)dt = \underline{f^{(\alpha)}} \star \eta_k(x).$$

Lorsque k est assez grand, puisque ω est borné, χ_k vaut 1 sur un voisinage de $\overline{\omega}$ donc, sur ω, $f_k^{(\alpha)} = (\underline{f} \star \eta_k)^{(\alpha)} = \underline{f^{(\alpha)}} \star \eta_k$.

3. D'après l'énoncé, on admet que $\underline{f^{(\alpha)}} \star \eta_k$ converge dans L^p vers $\underline{f^{(\alpha)}}$ lorsque k tend vers l'infini. Sur ω, la première fonction coïncide avec $f^{(\alpha)}_{k|\omega}$ pour k assez grand ; cela donne le résultat.

Exercice 4

1. a) On a :

$$\begin{aligned}
\|u_*\|_p^p &= \int_{x_1>0} |u(x_1,...,x_n)|^p dx + \int_{x_1<0} |u(-x_1,...,x_n)|^p dx \\
&= 2\int_\Omega |u(x)|^p dx \\
&= 2\|u\|_p^p.
\end{aligned}$$

Donc $\|u_*\|_p = 2^{1/p}\|u\|_p$. Le raisonnement qui précède s'applique à $p \neq +\infty$ mais le résultat est également valable pour $p = +\infty$.
On va maintenant montrer que u a des dérivées partielles dans L^p, qui sont, si $i = 1$:

$$\partial_i u_*(x_1,...,x_n) = \begin{cases} \partial_i u(x_1,x_2,...,x_n) & \text{si } x_1 > 0 \\ 0 & \text{si } x_1 = 0 \\ -\partial_i u(-x_1,x_2,...,x_n) & \text{si } x_1 < 0 \end{cases}$$

et, si $i \neq 1$:

$$\partial_i u_*(x_1,...,x_n) = \begin{cases} \partial_i u(x_1,x_2,...,x_n) & \text{si } x_1 > 0 \\ 0 & \text{si } x_1 = 0 \\ \partial_i u(-x_1,x_2,...,x_n) & \text{si } x_1 < 0. \end{cases}$$

Cela impliquera que, pour tout i, $\|\partial_i u_*\|_p = 2^{1/p}\|\partial_i u\|_p$.
Soit ϕ une fonction quelconque à support compact. On va calculer $\int_{\mathbb{R}^n} u_*\partial_i\phi$.
Soit $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction paire, de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui vaut 1 sur $[-1;1]$ et 0 en dehors de $[-2;2]$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\chi_k(x) = \chi(2^k x_1)$. La fonction χ_k ainsi définie est $\mathcal{C}^\infty$ à support dans $[-2^{1-k}; 2^{1-k}] \times \mathbb{R}^{n-1}$.
On a :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} u_*\partial_i\phi &= \int_{\mathbb{R}^n} u_*\partial_i(\phi(1-\chi_k) + \phi\chi_k) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} u_*\partial_i(\phi(1-\chi_k)) + \int_{\mathbb{R}^n} u_*(\partial_i\phi)\chi_k + \int_{\mathbb{R}^n} u_*\phi(\partial_i\chi_k)
\end{aligned}$$

Puisque $|\int_{\mathbb{R}^n} u_*(\partial_i\phi)\chi_k| \leq \int_{|x_1|\leq 2^{1-k}} |u_*(\partial_i\phi)|$ et puisque $u^*(\partial_i\phi)$ est L^1, ce terme tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$.
Pour $i \neq 1$, $\partial_i\chi_k = 0$ donc $\int_{\mathbb{R}^n} u_*\phi(\partial_i\chi_k) = 0$. Pour $i = 1$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} u_*\phi(\partial_i\chi_k) &= \int_{x_1>0} u(x_1,...,x_n)\phi(x_1,...,x_n)(\partial_1\chi_k)(x_1,...,x_n)dx \\
&\quad + \int_{x_1<0} u(-x_1,...,x_n)\phi(x_1,...,x_n)(-\partial_1\chi_k)(-x_1,...,x_n)dx \\
&= \int_{x_1>0} u(x_1,...,x_n)\partial_1(\chi_k)(x_1,...,x_n)(\phi(x_1,...,x_n) - \phi(-x_1,...,x_n))dx
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^n} u_*\phi(\partial_i\chi_k)\right| &\leq \int_{x_1>0} |u(x_1,...,x_n)|\,|\partial_1(\chi_k)(x_1,...,x_n)|\,|\phi(x_1,...,x_n)-\phi(-x_1,...,x_n)|dx \\
&\leq 2\|\partial_1\phi\|_\infty \int_{x_1>0} |u(x_1,...,x_n)|\,|\partial_1(\chi_k)(x_1,...,x_n)|\,|x_1|\,1_{\mathrm{Supp}(\phi)}(x)dx \\
&\leq 2.2^k\|\partial_1\phi\|_\infty\|\chi'\|_\infty \int_{0<x_1<2^{1-k}} |u(x_1,...,x_n)|\,|x_1|\,1_{\mathrm{Supp}(\phi)}(x)dx \\
&\leq 2.2^k\|\partial_1\phi\|_\infty\|\chi'\|_\infty \int_{0<x_1<2^{1-k}} |u(x_1,...,x_n)|\,2^{1-k}\,1_{\mathrm{Supp}(\phi)}(x)dx \\
&= 4\|\partial_1\phi\|_\infty\|\chi'\|_\infty \int_{0<x_1<2^{1-k}} |u(x_1,...,x_n)|\,1_{\mathrm{Supp}(\phi)}(x)dx \\
&\overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Donc, pour tout i, $\int_{\mathbb{R}^n} u_*\partial_i\phi = \int_{\mathbb{R}^n} u_*\partial_i(\phi(1-\chi_k)) + o(1)$. De plus :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} u_*\partial_i(\phi(1-\chi_k)) &= \int_{x_1>0} u(x_1,...,x_n)\partial_i(\phi(1-\chi_k))(x_1,...,x_n)dx \\
&\quad + \int_{x_1<0} u(-x_1,...,x_n)\partial_i(\phi(1-\chi_k))(x_1,...,x_n)dx \\
&= \int_{x_1>0} u(x_1,...,x_n)\partial_i(\phi(1-\chi_k))(x_1,...,x_n)dx \\
&\quad + \int_{x_1>0} u(x_1,...,x_n)\partial_i(g_k)(x_1,...,x_n)dx
\end{aligned}$$

où $g_k(x_1,...,x_n) = (\phi(1-\chi_k))(-x_1,...,x_n)$ si $i\neq 1$ et $g_k(x_1,...,x_n) = -(\phi(1-\chi_k))(-x_1,...,x_n)$ si $i=1$.

Puisque $\phi(1-\chi_k)$ et g_k sont $\mathcal{C}^\infty$ à support compact inclus dans Ω :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} u_*\partial_i(\phi(1-\chi_k)) &= \int_{x_1>0} \partial_i u(x_1,...,x_n)\phi(1-\chi_k)(x_1,...,x_n)dx \\
&\quad + \int_{x_1>0} \partial_i u(x_1,...,x_n)g_k(-x_1,...,x_n)dx \\
&= \int_{x_1>0} \partial_i u(x_1,...,x_n)\phi(1-\chi_k)(x_1,...,x_n)dx \\
&\quad + \int_{x_1<0} \varepsilon_i\partial_i u(-x_1,...,x_n)\phi(1-\chi_k)(x_1,...,x_n)dx
\end{aligned}$$

avec $\varepsilon_i = 1$ si $i\neq 1$ et $\varepsilon_i=-1$ si $i=1$.

En définissant $\partial_i u_*$ comme annoncé plus haut, on a ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} u_*\partial_i(\phi(1-\chi_k)) &= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_i u_*\phi - \int_{\mathbb{R}^n} \partial_i u_*\phi\chi_k \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_i u_*\phi + o(1)
\end{aligned}$$

Pour résumer, lorsque $k \to +\infty$, $\int_{\mathbb{R}^n} u_* \partial_i \phi = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_i u_* \phi + o(1)$. Donc $\int_{\mathbb{R}^n} u_* \partial_i \phi = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_i u_* \phi$. On a bien démontré ce qui était annoncé.
b) L'application $u \mapsto u_*$ convient.
2. Pour toute fonction $v \in W^{1,p}(\Omega)$, on définit v_* comme précédemment et $\tilde{v}_*$ par :

$$\tilde{v}_*(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} v(x_1, x_2, ..., x_n) & \text{si } x_1 > 0 \\ 0 & \text{si } x_1 = 0 \\ v(-\frac{1}{2}x_1, x_2, ..., x_n) & \text{si } x_1 < 0. \end{cases}$$

Le même raisonnement qu'à la question précédente montre que $\tilde{v}_*$ est dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ et que ses dérivées partielles valent :

$$\partial_i \tilde{v}_*(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} \partial_i v(x_1, x_2, ..., x_n) & \text{si } x_1 > 0 \\ 0 & \text{si } x_1 = 0 \\ -\frac{1}{2}\partial_i v(-\frac{1}{2}x_1, x_2, ..., x_n) & \text{si } x_1 < 0 \end{cases}$$

si $i = 1$ et, si $i \neq 1$:

$$\partial_i \tilde{v}_*(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} \partial_i v(x_1, x_2, ..., x_n) & \text{si } x_1 > 0 \\ 0 & \text{si } x_1 = 0 \\ \partial_i v(-\frac{1}{2}x_1, x_2, ..., x_n) & \text{si } x_1 < 0. \end{cases}$$

Donc $u_{2,*} = 4\tilde{u}_* - 3u_*$ est dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, avec des dérivées partielles qui valent, selon que i vaut 1 ou non :

$$\partial_i u_{2,*}(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} \partial_i u(x_1, x_2, ..., x_n) & \text{si } x_1 > 0 \\ 0 & \text{si } x_1 = 0 \\ -2\partial_i u(-\frac{1}{2}x_1, x_2, ..., x_n) + 3\partial_i u(-x_1, ..., x_n) & \text{si } x_1 < 0 \end{cases}$$

$$\partial_i u_{2,*}(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} \partial_i u(x_1, x_2, ..., x_n) & \text{si } x_1 > 0 \\ 0 & \text{si } x_1 = 0 \\ 4\partial_i u(-\frac{1}{2}x_1, x_2, ..., x_n) - 3\partial_i u(-x_1, ..., x_n) & \text{si } x_1 < 0. \end{cases}$$

Pour $i \neq 1$, $\partial_i u_{2,*} = 4\widetilde{(\partial_i u)}_* - 3(\partial_i u)_*$. Comme $\partial_i u$ appartient à $W^{1,p}(\Omega)$, $\widetilde{(\partial_i u)}_*$ et $(\partial_i u)_*$ sont dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ donc $\partial_i u_{2,*}$ est dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ (par le même raisonnement que précédemment). On peut de plus calculer les dérivées partielles secondes et majorer leurs normes en fonction de la norme des dérivées partielles de u.
Pour $i = 1$, $\partial_i u_{2,*} = -2\widetilde{(\partial_i u)}_* + 3(\partial_i u)_*$ et on peut appliquer le même argument pour montrer que $\partial_1 u_{2,*}$ est également dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.
Cela montre que $u_{2,*}$ est dans $W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ et le calcul des dérivées partielles montre que $u \in W^{2,p}(\Omega) \to u_{2,*} \in W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ est continue.
3. a) Soit $f \in W^{k,p}(\Omega)$. On applique à Ef la construction de l'exercice précédent, pour obtenir une suite $(f_l)_{l\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.
D'après la dernière question de l'exercice 3., appliquée à $\omega = \Omega \subset \mathbb{R}^n$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq p$, la suite des fonctions $f_l^{(\alpha)}$, restreintes à Ω, converge vers $(Ef)^{(\alpha)} = f^{(\alpha)}$ dans L^p.
b) On ne suppose plus que Ω est borné. Soit $f \in W^{k,p}(\Omega)$ quelconque. Soit $\varepsilon > 0$. Montrons qu'il existe $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\|f - g\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ est arbitrairement petite.
Soit $(\chi_l)_{l\in\mathbb{N}}$ définie comme dans l'exercice 3.
Lorsque $l \to +\infty$, $\|f - f\chi_l\|_{W^{1,p}(\Omega)} \to 0$. Soit l tel que $\|f - f\chi_l\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \varepsilon$.

L'ouvert $\Omega \cap B(0,4l)$ est borné. D'après la question précédente, il existe $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\|h - f\chi_l\|_{W^{1,p}(\Omega\cap B(0,4l))} < \varepsilon$.
Posons $g = h\chi_{2l}$. C'est un élément de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq k$ et montrons que $\|g^{(\alpha)} - f^{(\alpha)}\|_{L^p(\Omega)}$ est petite.
Comme χ_{2l} vaut 1 sur $B(0,2l)$, $g^{(\alpha)}$ est égale à $h^{(\alpha)}$ sur $\Omega \cap B(0,2l)$, donc :

$$\|g^{(\alpha)} - (f\chi_l)^{(\alpha)}\|_{L^p(\Omega\cap B(0,2l))} \leq \|h - f\chi_l\|_{W^{1,p}(\Omega\cap B(0,4l))} < \varepsilon. \tag{2}$$

Sur $\Omega - B(0,4l)$, $f\chi_l = 0$ et $g = 0$ (puisque $\chi_{2l} = 0$) donc :

$$\|g^{(\alpha)} - (f\chi_l)^{(\alpha)}\|_{L^p(\Omega - B(0,4l))} = 0. \tag{3}$$

Sur $\Omega \cap B(0,4l) - B(0,2l)$ (où $f\chi_l = 0$), on peut facilement montrer (en calculant les dérivées de g en fonction de celles de h et de χ) qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de l telle que :

$$\begin{aligned}
\|g^{(\alpha)} - (f\chi_l)^{(\alpha)}\|_{L^p(\Omega\cap B(0,4l)-B(0,2l))} &= \|g^{(\alpha)}\|_{L^p(\Omega\cap B(0,4l)-B(0,2l))} \\
&\leq C\|h\|_{W^{k,p}(\Omega\cap B(0,4l)-B(0,2l))} \\
&= C\|h - f\chi_l\|_{W^{k,p}(\Omega\cap B(0,4l)-B(0,2l))} \\
&\leq C\|h - f\chi_l\|_{W^{k,p}(\Omega\cap B(0,4l))} \\
&< C\varepsilon. \qquad (4)
\end{aligned}$$

En combinant (2), (3) et (4), on obtient :

$$\|g^{(\alpha)} - (f\chi_l)^{(\alpha)}\|_{L^p(\Omega)} < (C+1)\varepsilon.$$

En sommant sur les α tels que $|\alpha| \leq k$, on obtient qu'il existe une constante $\tilde{C} > 0$, indépendante de l et ε, telle que :

$$\|g - (f\chi_l)\|_{W^{k,p}(\Omega)} < \tilde{C}\varepsilon.$$

Puisque $\|f - (f\chi_l)\|_{W^{k,p}(\Omega)} < \varepsilon$:

$$\|g - f\|_{W^{k,p}(\Omega)} < (1 + \tilde{C})\varepsilon.$$

Exercice 5

1. Pour $n = 2$, c'est vrai ; l'inégalité est même une égalité, par Fubini.
Supposons l'inégalité démontrée en dimension $n - 1 \geq 2$ et démontrons-la en dimension n. Posons, comme suggéré dans l'énoncé :

$$g_i(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{n-1}) = \left(\int_{\mathbb{R}} |f_i(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{n-1}, t)|^{n-1} dt\right)^{1/(n-2)}$$

Pour tout $(x_1, ..., x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, d'après l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |f(x_1, ..., x_{n-1}, t)|dt &= |f_n(x_1, ..., x_{n-1})| \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^{n-1} |f_i(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{n-1}, t)|dt \\
&\leq |f_n(x_1, ..., x_{n-1})| \prod_{i=1}^{n-1} \|f_i(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{n-1}, .)\|_{n-1} \\
&= |f_n(x_1, ..., x_{n-1})| \prod_{i=1}^{n-1} g_i(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{n-1})^{(n-2)/(n-1)}
\end{aligned}$$

Posons $P : (x_1, ..., x_{n-1}) \mapsto \prod_{i=1}^{n-1} g_i(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{n-1})^{(n-2)/(n-1)}$ et appliquons à nouveau l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned}
\|f\|_1 &= \left\| (x_1, ..., x_{n-1}) \mapsto \int_{\mathbb{R}} |f(x_1, ..., x_{n-1}, t)|dt \right\|_1 \\
&\leq \| \, |f_n|P\|_1 \\
&\leq \|f_n\|_{n-1} \|P\|_{(n-1)/(n-2)} \qquad (5)
\end{aligned}$$

D'après la définition de P :

$$\|P\|_{(n-1)/(n-2)} = \left\| \prod_{i=1}^{n-1} g_i \right\|_1^{(n-2)/(n-1)}$$

et d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\|P\|_{(n-1)/(n-2)} \leq \prod_{i=1}^{n-1} \|g_i\|_{n-2}^{(n-2)/(n-1)} = \prod_{i=1}^{n-1} \|f_i\|_{n-1}$$

Combinée avec l'équation (5), cette inégalité donne le résultat demandé.

2. Pour tout $i = 1, ..., n$, on pose :

$$f_i : (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n) = \left(\int_{\mathbb{R}} |\nabla u(x_1, ..., x_{i-1}, t, x_{i+1}, ..., x_n)|dt \right)^{1/(n-1)}$$

Pour tout $x = (x_1, ..., x_n)$, $|u(x)| \leq f_i(x_1, ..., x_n)^{(n-1)}$. Donc, en utilisant la question 1. :

$$\begin{aligned}
\|u\|_{n/(n-1)} &= \|u^{n/(n-1)}\|_1^{(n-1)/n} \\
&\leq \|f_1 ... f_n\|_1^{(n-1)/n} \\
&\leq \|f_1\|_{n-1}^{(n-1)/n} ... \|f_n\|_{n-1}^{(n-1)/n} \\
&= \||\nabla u|\|_1^{1/n} ... \||\nabla u|\|_1^{1/n} = \||\nabla u|\|_1.
\end{aligned}$$

3. Soit $\gamma > 1$ fixé. Alors $\nabla(|u|^\gamma) = \gamma \text{ signe}(u)|u|^{\gamma-1}\nabla u$. En appliquant le résultat de la question précédente, on obtient :

$$\|u\|_{\gamma n/(n-1)}^\gamma = \||u|^\gamma\|_{n/(n-1)} \leq \gamma \||u|^{\gamma-1}|\nabla u|\|_1$$

Si on applique l'inégalité de Hölder :

$$\|u\|_{\gamma n/(n-1)}^{\gamma} \leq \gamma \||u|^{\gamma-1}\|_{p/(p-1)} \||\nabla u|\|_p = \gamma \|u\|_{(\gamma-1)p/(p-1)}^{\gamma-1} \||\nabla u|\|_p$$

On choisit γ de sorte que :

$$\left(\frac{\gamma n}{n-1} = \frac{(\gamma-1)p}{p-1}\right) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(\gamma = \frac{p(n-1)}{n-p}\right)$$

et on obtient :

$$\|u\|_{pn/(n-p)} \leq \frac{p(n-1)}{n-p} \||\nabla u|\|_p$$

ce qui est le résultat voulu.

4. Soit $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ quelconque.

D'après l'exercice 4, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ qui converge dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ vers u.

La suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans L^{p^*} car, pour tous k_1, k_2, d'après la question 3. :

$$\|f_{k_1} - f_{k_2}\|_{p^*} \leq C \||\nabla(f_{k_1} - f_{k_2})|\|_p$$

et la suite $(\nabla f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans L^p puisqu'elle converge vers ∇u.

En plus de converger dans L^p, la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge donc dans L^{p^*}. Sa limite est identique dans les deux espaces : c'est u. Donc $u \in L^{p^*}$ et :

$$\|u\|_{p^*} = \lim_{k\to+\infty} \|f_k\|_{p^*} \leq C \lim_{k\to+\infty} \||\nabla f_k|\|_p = C\||\nabla u|\|_p$$

Exercice 6

1. Si $f \in W^{s,2}$ (avec la définition précédente du TD), alors $f \in L^2$, donc $\hat{f} \in L^2$. De plus, pour tout j, $\partial_j^s f \in L^2$ donc $\widehat{\partial_j^s f} = (i\xi_j)^s \hat{f}$ appartient à L^2. En sommant sur j, on obtient que $\|\xi\|_s^s \hat{f}$ appartient à L^2, ce qui revient à dire que $|\xi|^s \hat{f}$ appartient à L^2 (où $|\xi|$ désigne la norme euclidienne usuelle), par équivalence des normes en dimension finie.

Donc $(1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathcal{F} f$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^n)$ et $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$.

Inversement, si $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$, alors $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et, pour tout multi-indice α tel que $|\alpha| \leq s$, $(i\xi)^\alpha \hat{f}$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^n)$. Cette fonction est la transformée de Fourier de $f^{(\alpha)}$ (au sens des distributions) donc cela signifie que $f^{(\alpha)} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Donc $f \in W^{s,2}$.

Montrons maintenant l'équivalence des deux normes.

Pour toute $f \in W^{s,2}$ (avec la définition du début du TD) :

$$\begin{aligned}
\|f\|_{W^{s,2}}^2 &= \sum_{|\alpha|\le s} \|f^{(\alpha)}\|_2^2 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{|\alpha|\le s} \|\widehat{f^{(\alpha)}}\|_2^2 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{|\alpha|\le s} \||\xi|^{|\alpha|}\hat{f}(\xi)\|_2^2 \\
&\le \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{|\alpha|\le s} \left\| \left(\sqrt{1+|\xi|^2}\right)^{|\alpha|} \hat{f}(\xi) \right\|_2^2 \\
&\le \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{|\alpha|\le s} \| \left(1+|\xi|^2\right)^{s/2} \hat{f}(\xi)\|_2^2 \\
&= C\|f\|_{H^s}^2
\end{aligned}$$

pour $C = \frac{1}{(2\pi)^n}\mathrm{Card}\{\alpha \text{ tq } |\alpha| \le s\}$.
On a également, pour $s \ge 1$ (mais le résultat est vrai aussi pour $s = 0$, avec une constante différente) :

$$\begin{aligned}
\|f\|_{W^{s,2}}^2 &\ge \|f\|_2^2 + \sum_{j\le n} \|\partial_j^s f\|_2^2 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \left(\|\hat{f}\|_2^2 + \sum_{j\le n} \||\xi_j|^s \hat{f}\|_2^2 \right) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \|(1+\|\xi\|_{2s}^{2s})^{1/2}\hat{f}\|_2^2 \\
&\ge \frac{C}{(2\pi)^n} \|(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{f}\|_2^2 \\
&= \frac{C}{(2\pi)^n} \|f\|_{H^s}^2
\end{aligned}$$

pour une certaine constante $C > 0$.
2. On remarque d'abord :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy &= \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)-f(x+z)|^2}{|z|^{n+2s}} dxdz \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\|\widehat{f - f(.+z)}\|_2^2}{|z|^{n+2s}} dz \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\omega)|^2 \frac{|1-e^{i\omega.z}|^2}{|z|^{n+2s}} d\omega dz
\end{aligned}$$

Si on pose $G(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|1-e^{i\omega.z}|^2}{|z|^{n+2s}} dz$, on vérifie que cette fonction est bien définie et (par changement de variable) qu'elle vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
\forall\, \omega \in \mathbb{R}^n, R \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), &\quad G(R\omega) = G(\omega) \\
\forall\, \omega \in \mathbb{R}^n, a > 0, &\quad G(a\omega) = a^{2s}G(\omega).
\end{aligned}$$

Il existe donc une constante $C_s > 0$ telle que, pour tout $\omega \in \mathbb{R}^n$, $G(\omega) = C_s|\omega|^{2s}$. Ainsi :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy = \frac{C_s}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\omega|^{2s} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

donc les deux définitions sont équivalentes.
3. Pour toute fonction $g \in L^2 \cap L^1(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{F}^{-1}(g)$ est continue et bornée. De plus, (cela se vérifie à partir de la formule d'inversion) :

$$\|\mathcal{F}^{-1}(g)\|_\infty \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \|g\|_1$$

Soit $s > n/2$ fixé. Notons $h : \xi \to (1+|\xi|^2)^{-s/2}$. Cette fonction appartient à L^2 donc, pour toute $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$:

$$\|\mathcal{F}f\|_1 = \|h\,(1+|\cdot|^2)^{s/2}\mathcal{F}f\|_1 \leq \|h\|_2 \|(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}f\|_2 = \|h\|_2 \|f\|_{H^s}$$
$$\Rightarrow \|f\|_\infty \leq \frac{\|h\|_2}{(2\pi)^n} \|f\|_{H^s}$$

Exercice 7

1. On a l'égalité suivante :

$$\|f\|_{L^q}^q = \int_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|^q\, dx = \int_{x\in\mathbb{R}^n} \int_0^{|f(x)|} q\, \lambda^{q-1}\, d\lambda\, dx$$

que l'on peut réécrire de la façon suivante :

$$\|f\|_{L^q}^q = \int_{x\in\mathbb{R}^n} \int_{\lambda\in\mathbb{R}^+} \mathbb{1}_{|f(x)|>\lambda}\, q\, \lambda^{q-1}\, d\lambda\, dx = \int_{\lambda\in\mathbb{R}^+} q\, \lambda^{q-1} \int_{x\in\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{|f(x)|>\lambda}\, dx\, d\lambda$$

où l'on a utilisé le théorème de Fubini dans la dernière égalité. On en déduit alors le résultat.
2. On commence par montrer qu'il existe $C_1(s,n)$ une constante strictement positive dépendant uniquement de n et de s telle que $\|g_\lambda\|_{L^\infty} \leq C_1(s,n) A_\lambda^{\frac{n}{2}-s}$. D'après le théorème d'inversion de Fourier, on a

$$|g_\lambda(x)| = \left| \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\cdot\xi} \widehat{g_\lambda}(\xi)\, d\xi \right| = \left| \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{|\xi|\leq A_\lambda} e^{ix\cdot\xi} \widehat{f}(\xi)\, d\xi \right|.$$

Comme $2s < n$, on peut utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui donne

$$|g_\lambda(x)| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \left(\int_{|\xi|\leq A_\lambda} |\xi|^{-2s}\, d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |\xi|^{2s} |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En passant en coordonnées polaires, on a

$$\int_{|\xi|\leq A_\lambda} |\xi|^{-2s}\, d\xi = \int_0^{A_\lambda} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} r^{n-1-2s}\, d\theta\, dr = \frac{|\mathbb{S}^{n-1}| A_\lambda^{n-2s}}{n-2s}$$

ce qui nous donne l'inégalité souhaitée avec $C_1(s,n) = |\mathbb{S}^{n-1}|^{1/2}/((2\pi)^n(n-2s)^{1/2})$ (puisqu'on a supposé que $\|f\|_{\dot{H}^s} = 1$).
On définit alors A_λ par $C_1(s,n)A_\lambda^{n/2-s} = \lambda/2$. On a alors $\|g_\lambda\|_\infty \leq \lambda/2$. Or g_λ est une fonction continue comme transformée de Fourier d'une fonction intégrable donc on en déduit que $\{|g_\lambda| > \lambda/2\} = \emptyset$.
3. D'après l'inégalité triangulaire,

$$\{|f| > \lambda\} \subset \{|g_\lambda| > \lambda/2\} \cup \{|h_\lambda| > \lambda/2\}\,.$$

La constante A_λ étant telle que $\{|g_\lambda| > \lambda/2\} = \emptyset$, on en déduit

$$|\{|f| > \lambda\}| \leq |\{|h_\lambda| > \lambda/2\}| \leq \frac{4}{\lambda^2}\|h_\lambda\|_{L^2}^2,$$

car

$$\|h_\lambda\|_{L^2}^2 \geq \int_{\{|h_\lambda|>\lambda/2\}} |h_\lambda|^2\,dx \geq \frac{\lambda^2}{4}\,|\{|h_\lambda| > \lambda/2\}|\,.$$

En utilisant la question 1., on conclut à l'inégalité voulue.
4. D'après l'inégalité obtenue à la question 3., la définition de h_λ et la formule de Plancherel, on a :

$$\|f\|_{L^q}^q \leq 4q\,(2\pi)^{-n}\int_0^{+\infty}\int_{|\xi|>A_\lambda} \lambda^{q-3}\,|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi\,d\lambda.$$

Par définition de A_λ,

$$|\xi| > A_\lambda \Leftrightarrow \lambda < \Lambda(\xi) := 2\,C_1(s,n)|\xi|^{\frac{n}{2}-s},$$

donc, en utilisant le théorème de Fubini, il vient

$$\|f\|_{L^q}^q \leq 4q\,(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_0^{\Lambda(\xi)} \lambda^{q-3}d\lambda\right)|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi,$$

d'où

$$\|f\|_{L^q}^q \leq C_2(s,n)\int_{\mathbb{R}^n} \Lambda(\xi)^{q-2}\,|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi,$$

où $C_2(s,n)$ est une constante positive dépendant de s et n. De plus, $n/2 - s = n/q$, on a donc $\Lambda(\xi) = 2\,C_1(s,n)|\xi|^{\frac{n}{q}}$ puis on obtient :

$$\|f\|_{L^q}^q \leq C_3(s,n)\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{\frac{n(q-2)}{q}}\,|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi = C_3(s,n)\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s}\,|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi$$

où $C_3(s,n)$ est une constante positive dépendant de s et n. On conclut en utilisant qu'on a supposé $\|f\|_{\dot{H}^s} = 1$.
5. Remarquons tout d'abord que l'inégalité prouvée à la question 4. est également valable dans le cas où $\|f\|_{\dot{H}^s} \neq 1$. Prouvons maintenant que ce résultat implique bien la conclusion du théorème. Si $2 \leq p < q = 2n/(n-2s)$, alors il existe $s' \in [0, s[$ tel que $p = 2n/(n-2s')$ et donc d'après ce qui précède,

$$\|f\|_{L^p} \leq C\,\|f\|_{\dot{H}^{s'}} \leq C\,\|f\|_{H^s}$$

(remarquons qu'on ne peut pas majorer $\|f\|_{\dot{H}^{s'}}$ par $\|f\|_{\dot{H}^s}$). Enfin, un argument de densité de $\mathcal{S}$ dans H^s nous permet de conclure.

6. D'après la question précédente, on a l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\|f\|_{L^p} \leq C\,\|f\|_{\dot{H}^{s_p}}.$$

De plus, on peut montrer que si $(s_1, s_2) \in (\mathbb{R}^+)^2$ et $\theta \in [0,1]$, on a

$$\|f\|_{\dot{H}^{\theta s_1 + (1-\theta)s_2}} \leq \|f\|_{\dot{H}^{s_1}}^{\theta}\,\|f\|_{\dot{H}^{s_2}}^{1-\theta}.$$

En effet, en appliquant l'inégalité de Hölder avec la mesure $|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi$ et avec les fonctions $|\xi|^{\theta s_1}$ et $|\xi|^{(1-\theta)s_2}$, on obtient l'inégalité voulue. En prenant $(s_1, s_2) = (s, 0)$ et $\theta = s_p/s$, on en déduit que

$$\|f\|_{\dot{H}^{s_p}} \leq \|f\|_{L^2}^{1-\theta}\,\|f\|_{\dot{H}^s}^{\theta},$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 8

1. Soit $f \in W^{1,p}(\Omega)$. On note $E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ un opérateur de prolongement comme à l'exercice 4.
D'après la question 4. de l'exercice 5, $\|Ef\|_{p^*} \leq C\|\nabla(Ef)\|_p \leq C\|Ef\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|E\|\,\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.
Puisque Ef et f coïncident sur Ω, $\|f\|_{p^*} \leq \|Ef\|_{p^*} \leq C\|E\|\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.
Si $q \leq p^*$, l'inégalité de Hölder implique :

$$\|f\|_q \leq \|f\|_{p^*}|\Omega|^{(p^*-q)/(p^*q)}$$

où $|\Omega|$ désigne le volume de Ω.
Donc, pour une certaine constante C' indépendante de f :

$$\|f\|_q \leq C'\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

2. a) Pour tout k, f_k est une fonction de L^p à support inclus dans un ouvert V borné. Par l'inégalité de Hölder, il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend que de V telle que, pour tout k :

$$\|f_k\|_1 \leq C\|f_k\|_p.$$

La convolution d'une fonction intégrable et d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (par convergence dominée). Donc, pour tout k, $f_k \star \eta_s$ est $\mathcal{C}^\infty$.
De plus, pour tout k :

$$\|f_k \star \eta_s\|_\infty \leq \|f_k\|_1\|\eta_s\|_\infty \leq C\|f_k\|_p\|\eta_s\|_\infty.$$

Puisque $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, la suite $(\|f_k \star \eta_s\|_\infty)_{k\in\mathbb{N}}$ est majorée. Donc $(f_k \star \eta_s)_{k\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée.
De plus :

$$\nabla(f_k \star \eta_s) = f_k \star (\nabla \eta_s).$$

Donc, par le même argument que précédemment, $(\nabla(f_k \star \eta_s))_{k\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée. Cela entraîne que $(f_k \star \eta_s)_{k\in\mathbb{N}}$ est uniformément équicontinue.

b) D'après le théorème d'Ascoli, puisque toutes les fonctions sont à support dans $\overline{V}$, qui est compact, on peut extraire de $(f_k \star \eta_s)_{k\in\mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge uniformément. Si elle converge uniformément, elle converge également dans $L^q(V)$.
c) Commençons par montrer que, lorsque $s \to +\infty$, $\|f_k \star \eta_s - f_k\|_1 \to 0$ uniformément en k.
Pour tout x :

$$\begin{aligned}
|f_k \star \eta_s(x) - f_k(x)| &= \left|\int \eta_s(t)(f_k(x-t) - f_k(x))dt\right| \\
&= \left|\int \eta_s(t)\left(\int_0^1 \langle \nabla(f_k(x-ut)), t\rangle\, du\right) dt\right| \\
&\leq \int |\eta_s(t)| \int_0^1 |\nabla(f_k(x-ut))|\,|t|\, du\, dt
\end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned}
\|f_k \star \eta_s - f_k\|_1 &\leq \|\nabla f_k\|_1 \int |t||\eta_s(t)|\, dt \\
&= \|\nabla f_k\|_1 2^{-s} \int |t||\eta(t)|\, dt.
\end{aligned}$$

Toujours par l'inégalité de Hölder, $(\nabla f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée dans L^1, puisqu'elle l'est dans L^p. Cela démontrer la convergence uniforme dans L^1.
Démontrons maintenant que le résultat est encore vrai si on remplace L^1 par L^q avec $q < p^*$.
D'après la question 1., $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^{p^*}. Pour tous k, s, $\|f_k \star \eta_s\|_{p^*} \leq \|f_k\|_{p^*}\|\eta_s\|_1 = \|f_k\|_{p^*}$.
Donc $(f_k \star \eta_s - f_k)_{k,s\in\mathbb{N}}$ est une famille bornée de $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$.
Par Hölder, si on pose $\theta = \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*}\right) / \left(1 - \frac{1}{p^*}\right) > 0$:

$$\|f_k \star \eta_s - f_k\|_q \leq \|f_k \star \eta_s - f_k\|_1^{\theta}\|f_k \star \eta_s - f_k\|_{p^*}^{1-\theta}$$

ce qui converge vers 0 uniformément en k lorsque $s \to +\infty$.
En procédant par extraction diagonale, d'après la question 2.b), on peut trouver une extraction ϕ : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que, pour tout s, $(f_{\phi(k)} \star \eta_s)_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans L^q.
D'après ce qu'on vient de voir, $\|f_{\phi(k)} \star \eta_s - f_{\phi(k)}\|_q \to 0$ uniformément en k lorsque $s \to +\infty$. Donc $(f_{\phi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans L^q.
3. Il suffit de montrer que, de toute suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite qui converge dans $L^q(\Omega)$.
On note $E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ un opérateur comme dans l'exercice 4.
Soit $\chi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction à support compact qui vaut 1 sur un voisinage de Ω. Alors $(\chi(Ef_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de fonctions de $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, à support inclus dans un même compact, qui coïncide avec f_k sur Ω. D'après la question 2.c), il existe une extraction ϕ telle que $(\chi(Ef_{\phi(k)}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^q(\mathbb{R}^n)$. Alors $(f_{\phi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^q(\Omega)$.

Exercice 9

Commençons par montrer que $W^{1,p}(\Omega)$ s'injecte de manière compacte dans $L^p(\Omega)$.

On traite séparément le cas $n = 1$. Dans ce cas, toute famille bornée $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $W^{1,p}(\Omega)$ est uniformément bornée et équicontinue (car $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^p(\Omega)$ et donc dans $L^1(\Omega)$). D'après le théorème d'Ascoli, elle admet une sous-suite qui converge dans $(\mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$. Cette sous-suite converge également dans $L^p(\Omega)$.

On suppose maintenant $n \geq 2$.

Soit $p' < n$ tel que $p' \leq p$ et $p < \frac{np'}{n-p'}$. Si $p < n$, on peut prendre $p' = p$; sinon, il suffit de prendre p' proche de n.

Puisque $p' \leq p$ et puisque Ω est borné, $W^{1,p}(\Omega)$ est inclus dans $W^{1,p'}(\Omega)$. De plus, l'injection est continue.

D'après l'exercice 4, $W^{1,p'}(\Omega)$ s'injecte de manière compacte dans $L^p(\Omega)$. Donc $W^{1,p}(\Omega)$ s'injecte également de manière compacte dans $L^p(\Omega)$.

Démontrons maintenant l'inégalité demandée en raisonnant par l'absurde. Supposons qu'il existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $W^{1,p}(\Omega)$ telle que, pour tout n :

$$\left\| u_n - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u_n \right\|_p > 2^n \|\nabla u_n\|_p.$$

Quitte à ajouter à u_n une constante bien choisie, on peut supposer $\int_\Omega u_n = 0$. On peut également normaliser u_n et supposer $\|u_n\|_p = 1$ pour tout n.

Dans ces conditions, $\|u_n - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_n\|_p = 1$ pour tout n donc $\|\nabla u_n\|_p < 2^{-n}$ pour tout n.

En particulier, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$. Puisque l'injection vers $L^p(\Omega)$ est compacte, il existe une extraction $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^p(\Omega)$ vers une limite v.

Comme $(\nabla u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 dans $L^p(\Omega)$, la suite $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge en fait vers v dans $W^{1,p}(\Omega)$ et $\nabla v = 0$ donc v est une fonction constante.

Par passage à la limite des propriétés de u_n, $\int_\Omega v = 0$ donc $v = 0$. Mais $\|v\|_p = \lim_{n\to+\infty} \|u_{\phi(n)}\|_p = 1$. C'est absurde.

Exercice 10

1. a) Soit $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ à support compact.

Pour tout x', la fonction $t \to |u(t,x')|^p$ est continue. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement aux points où elle est nulle. Sa dérivée vaut $t \to \text{signe}(u(t,x'))|u(t,x')|^{p-1}\partial_1 u(t,x')$.

On en déduit, en utilisant le fait que u est à support compact :

$$|u(0,x')|^p \leq \int_\mathbb{R} |u(t,x')|^{p-1}|\partial_1 u(t,x')|dt$$

et, en intégrant sur x' puis en utilisant l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned}\int |u(0,x')|^p dx' &\leq \int_\mathbb{R} |u(x)|^{p-1}|\partial_1 u(x)|dx \\ &\leq \|\partial_1 u\|_p \|u\|_p^{p-1}\end{aligned}$$

D'où :

$$\left(\int |u(0,x')|^p dx'\right)^{1/p} \leq \|\partial_1 u\|_p^{1/p}\|u\|_p^{1-1/p} \leq \max(\|u\|_p, \|\partial_1 u\|_p) \leq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

b) On utilise le fait que la restriction à Ω des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ à support compact forme un sous-ensemble dense de $W^{1,p}(\Omega)$. De plus, d'après la question 1.a), l'opérateur $u \to u(0,.) \in L^p(\mathbb{R}^{n-1})$,

défini sur ce sous-ensemble dense, est uniformément continu pour la norme $\|.\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. Il admet donc un unique prolongement à $W^{1,p}(\Omega)$.
2. Si u est $\mathcal{C}^\infty$, à support compact inclus dans Ω, alors $\gamma(u)=0$. Puisque γ est continue, γ est nulle sur l'adhérence de cet ensemble de fonctions, c'est-à-dire que $\gamma(u)=0$ pour tout $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$.
Réciproquement, soit u tel que $\gamma(u)=0$. Montrons $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$.
On commence par un lemme qu'on prouvera plus tard.

Lemme. *Soit $u_*\in L^p(\mathbb{R}^n)$ la fonction qui vaut u sur Ω et 0 sur $\mathbb{R}^n-\Omega$. Alors $u_*\in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.*

Pour tout $\varepsilon>0$, on pose u_ε la fonction suivante :

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x_1,...,x_n) &= u_*(x_1,...,x_n) \text{ si } x_1<\varepsilon \\ &= u_*(2\varepsilon-x_1,x_2,...,x_n) \text{ si } x_1\geq\varepsilon \end{aligned}$$

De la même manière qu'à l'exercice 4, on montre que u_ε appartient à $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ et que $\|u_\varepsilon\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}\leq C\|u_{*|]-\infty;\varepsilon]\times\mathbb{R}^{n-1}}\|_{W^{1,p}(]-\infty;\varepsilon]\times\mathbb{R}^{n-1})}$, pour une constante C indépendante de ε. Puisque u_* est nulle sur $]-\infty;0]\times\mathbb{R}^{n-1}$, cela entraîne que, lorsque ε tend vers 0 :

$$\|u_\varepsilon\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}\to 0 \tag{6}$$

Pour tout $\varepsilon>0$, $u-u_\varepsilon$ est nulle sur $[0;\varepsilon]\times\mathbb{R}^{n-1}$. En convolant cette fonction avec des suites régularisantes (comme dans l'exercice 4), on peut trouver une suite $(f_{\varepsilon,k})_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support dans $[\varepsilon/2;+\infty[\times\mathbb{R}^{n-1}$ telle que :

$$\|f_{\varepsilon,k}-(u-u_\varepsilon)\|_{W^{1,p}(\Omega)}\to 0 \quad \text{quand } k\to+\infty$$

Quitte à les tronquer correctement, on peut supposer de plus que ces fonctions sont à support compact. En combinant cette propriété avec l'équation (6), on obtient le résultat voulu.

Preuve du lemme. On va montrer que les dérivées partielles de u_* coïncident avec celles de u sur Ω et sont nulles sur le complémentaire de Ω.
Soit $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\|u-v_k\|_{W^{1,p}(\Omega)}\to 0$.
Soit $\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Soit $j\leq n$. Calculons $\int_{\mathbb{R}^n}(\partial_j\phi)u_*$. On traite le cas $j=1$; le cas $j>1$ est similaire mais plus simple.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n}(\partial_1\phi)u_* &= \int_\Omega(\partial_1\phi)u \\ &= \lim_{k\to+\infty}\int_\Omega(\partial_1\phi)v_k \\ &= \lim_{k\to+\infty} -\int_\Omega\phi(\partial_1 v_k)+\int_{\{0\}\times\mathbb{R}^{n-1}}\phi v_k \\ &= -\int_\Omega\phi(\partial_1 u)+\lim_{k\to+\infty}\int_{\{0\}\times\mathbb{R}^{n-1}}\phi v_k \\ &= -\int_\Omega\phi(\partial_1 u) \end{aligned}$$

En effet, pour tout k, $\left|\int_{\{0\}\times\mathbb{R}^{n-1}}\phi v_k\right|\leq\|\phi(0,.)\|_{p/(p-1)}\|\gamma(v_k)\|_p$. Or $\gamma(v_k)\to 0$ dans $L^p(\mathbb{R}^{n-1})$, puisque $v_k\to u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, γ est continue et $\gamma(u)=0$. Donc $\int_{\{0\}\times\mathbb{R}^{n-1}}\phi v_k\to 0$. $\square$

3. Il suffit de montrer qu'il existe $C > 0$ telle que, pour toute $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\|u(0,.)\|_{H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C\|u\|_{H^s(\Omega)}$$

On pourra ensuite conclure comme en 1.b) en utilisant la densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $H^s(\mathbb{R}^n)$ (qui est une conséquence de la densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ et de la définition de $H^s(\mathbb{R}^n)$).
Soit donc $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Pour tous $x_1, \xi_2, ..., \xi_n \in \mathbb{R}^n$, on note :

$$f(x_1, \xi_2, ..., \xi_n) = \mathcal{F}((x_2, ..., x_n) \to f(x_1, x_2, ..., x_n))(\xi_2, ..., \xi_n)$$

Si on fixe $\xi_2, ..., \xi_n$, la fonction $x_1 \to f(x_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ a pour transformée de Fourier $\xi_1 \to \hat{u}(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$. Donc, en appliquant la formule d'inversion :

$$f(0, \xi_2, ..., \xi_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi_1, ..., \xi_n)d\xi_1$$

ce qui entraîne, en utilisant l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned}
|f(0, \xi_2, ..., \xi_n)|^2 &\leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\hat{u}(\xi_1, ..., \xi_n)|d\xi_1\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{s/2}}(1+|\xi|^2)^{s/2}|\hat{u}(\xi_1, ..., \xi_n)|d\xi_1\right)^2 \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\left(\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|^2)^s|\hat{u}(\xi_1, ..., \xi_n)|^2 d\xi_1\right)\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{(1+|\xi|^2)^s}d\xi_1\right).
\end{aligned}$$

On vérifie par un changement de variable dans l'intégrale qu'il existe une constante D dépendant seulement de s telle que, pour tout $\xi_2, ..., \xi_n$:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^s}d\xi_1 = D(1+|\xi_2|^2 + ... + |\xi_n|^2)^{1/2-s}$$

Donc :

$$|f(0, \xi_2, ..., \xi_n)|^2(1+|\xi_2|^2 + ... + |\xi_n|^2)^{s-1/2} \leq \frac{D}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|^2)^s|\hat{u}(\xi_1, ..., \xi_n)|^2 d\xi_1$$

Lorsqu'on intègre sur $\xi_2, ..., \xi_n$, on trouve :

$$\|u(0,.)\|_{H^{s-1/2}} = \|f(0,\xi)(1+|\xi|^2)^{(s-1/2)/2}\|_2 \leq \sqrt{\frac{D}{2\pi}}\|u\|_{H^s}.$$

Exercice 11

1. Soit H un espace de Hilbert (sur $\mathbb{R}$). Le théorème de représentation de Riesz dit que, pour toute forme linéaire continue $\phi \in H'$, il existe un unique $a \in H$ tel que :

$$\forall\, x \in H, \qquad \phi(x) = \langle a, x\rangle\,.$$

2. Soit ϕ une forme linéaire continue.

D'après le théorème de représentation de Riesz, pour tout $u \in H$, il existe $Au \in H$ tel que :

$$\forall\, v \in H, \qquad a(u,v) = \langle Au, v\rangle\,.$$

De plus, il existe $U \in H$ tel que :

$$\forall\, v \in H, \qquad \phi(v) = \langle U, v\rangle\,.$$

Il suffit donc de montrer qu'il existe u tel que $Au = U$. Nous allons donc démontrer que A est surjective. L'application A est linéaire. Puisque a est continue, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout u :

$$\forall\, v \in H, \qquad |\,\langle Au, v\rangle\,| = a(u,v) \leq C\|u\|\,\|v\|.$$

ce qui implique $\|Au\| \leq C\|u\|$. L'application A est donc continue.
De plus, par hypothèse, on a, pour tout $u \in H$, $\|Au\|\,\|u\| \geq |\,\langle Au, u\rangle\,| = |a(u,u)| \geq c\|u\|^2$ donc $\|Au\| \geq c\|u\|$. Cela implique que A est un isomorphisme sur son image. Donc $\mathrm{Im}(A)$ est un espace complet, ce qui entraîne que c'est un fermé de H.
Pour montrer $\mathrm{Im}(A) = H$, il suffit maintenant de montrer que $(\mathrm{Im}(A))^{\perp} = \{0\}$. Pour cela, supposons fixé $h \in (\mathrm{Im}(A))^{\perp}$ et montrons qu'on a $h = 0$.
On doit avoir $0 = \langle Ah, h\rangle = a(h,h) \geq c\|h\|^2$. Donc $h = 0$.

Exercice 12

1. On multiplie l'équation $(*)$ par ϕ et on intègre sur I :

$$\int_I (-u''(x)\phi(x) + c(x)u(x)\phi(x))\,dx = \int_I f(x)\phi(x)\,dx.$$

On fait ensuite une intégration par parties dans le premier terme et on utilise que $\phi(a) = \phi(b) = 0$ puisque ϕ est à support compact dans I pour conclure.
2. L'intégrale définissant $a(u,v)$ est bien définie pour u, $v \in H_0^1(I)$. En effet, u' et v' étant dans L^2, par Cauchy-Schwartz, leur produit est dans L^1. Pour le deuxième terme, on utilise que c est dans L^∞ et u et v sont dans L^2. On utilise exactement les mêmes arguments pour obtenir :

$$\forall\,(u,v) \in (H_0^1(I))^2, \quad |a(u,v)| \leq (1 + \|c\|_\infty)\|u\|_{H^1(I)}\|v\|_{H^1(I)}$$

ce qui nous donne la continuité de a. Pour la coercivité, en utilisant $c \geq 0$ et l'inégalité de Poincaré, on a :

$$\forall\, u \in H_0^1(I), \quad a(u,u) = \int_I ((u'(x))^2 + c(x)u^2(x))\,dx \geq \|u'\|_2^2 \geq \frac{1}{C_P}\|u\|_{H^1(I)}$$

où C_P est la constante de l'inégalité de Poincaré.
3. On introduit $L(v) = \int_I f(x)v(x)\,dx$ pour $v \in H_0^1(I)$. On vérifie que L est bien définie et qu'il s'agit d'une forme linéaire continue sur $H_0^1(I)$ par Cauchy-Schwartz :

$$\forall\, v \in H_0^1(I), \quad |L(v)| \leq \|f\|_2\|v\|_2 \leq \|f\|_2\|v\|_{H^1(I)}.$$

La relation $(**)$ s'écrit alors

$$\forall\, v \in H_0^1(I), \quad a(u,v) = L(v)$$

et d'après le théorème de Lax-Milgram, il existe un unique $u \in H_0^1(I)$ vérifiant cette relation.

4. Si u est une solution classique alors u est une solution faible d'après la question 1.. On en déduit que u est une solution variationnelle du problème par densité de $\mathcal{D}(I)$ dans $H_0^1(I)$. Il y a donc au plus une solution de ce type.

Soit $u \in H_0^1(I)$ une solution variationnelle du problème. Alors u est solution faible c'est-à-dire :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(I), \quad \int_I u'(x)\phi'(x)\,dx = \int_I (f(x) - c(x)u(x))\phi(x)\,dx.$$

Or $f - cu$ est dans $L^2(I)$ puisque f et u le sont aussi et que c est borné. Comme u' est aussi dans $L^2(I)$ par hypothèse, on en déduit que u' est dans $H^1(I)$ et que $(u')' = -(f - cu)$ au sens des distributions. Mais la fonction $x \mapsto c(x)u(x) - f(x)$ est continue donc $(u')'$ possède un représentant continu. Donc u est de classe $\mathcal{C}^2$ et satisfait $-u'' + cu = f$ au sens des distributions. On a en particulier que $-u'' + f - cu$ est un élément de $L^2(I)$ qui est orthogonal au sous-espace dense $\mathcal{D}(I)$, on en déduit que $-u'' + cu = f$ p.p. puis partout sur I par continuité. Et on a bien $u(a) = u(b) = 0$ puisque $u \in H_0^1(I)$.