Corrigé TD n°2.

Exercice 1

Soient α, β des multi-indices quelconques. Il faut montrer qu'il existe $D > 0$ telle que :

$$\forall\, x, \xi, \qquad \left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)\right| \leq D(1+|\xi|)^{k-|\beta|}.$$

Par hypothèse, cette propriété est vraie pour $|\xi| \geq R$, avec R dépendant de α et β. Il suffit de montrer qu'elle est aussi vraie si $|\xi| < R$.
Comme $(1+|\xi|)^{k-|\beta|}$ est minorée sur $B(0,R)$, il est suffisant de montrer qu'il existe une constante D' vérifiant :

$$\forall\, x, \xi, \qquad \left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)\right| \leq D' \qquad \text{si } |\xi| < R.$$

Cette propriété est vraie puisque, lorsque $|\xi| < R$, comme $a \in S^m_{\rho,0}$:

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)\right| \leq D''(1+|\xi|)^{m-\rho|\beta|} \leq D'' \max(1, (1+R)^{m-\rho|\beta|}).$$

Exercice 2

1. Pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Op}(a)(\partial_j u)(x) - \partial_j(\operatorname{Op}(a)(u))(x) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\xi} a(x,\xi)(i\xi_j)\hat{u}(\xi)d\xi - \frac{1}{(2\pi)^n}\int \frac{\partial}{\partial x_j}(e^{ix\xi}a(x,\xi))\hat{u}(\xi)d\xi \\ &= \frac{-1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\xi}\frac{\partial}{\partial x_j}a(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

Donc le commutateur $[\operatorname{Op}(a), \partial_j]$ est bien un opérateur pseudo-différentiel de symbole $-\frac{\partial}{\partial x_j}a$.
2. Soit $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On utilise la relation $\widehat{x_j u} = i\partial_j \hat{u}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Op}(a)(x_j u)(x) - x_j \operatorname{Op}(a)(u)(x) \\ &= \frac{i}{(2\pi)^n}\int e^{ix\xi}a(x,\xi)\partial_j\hat{u}(\xi)d\xi - \frac{1}{(2\pi)^n}\int x_j e^{ix\xi}a(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi \\ &= \frac{-i}{(2\pi)^n}\int \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(e^{ix\xi}a(x,\xi)\right)\hat{u}(\xi)d\xi - \frac{1}{(2\pi)^n}\int x_j e^{ix\xi}a(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi \\ &= \frac{-i}{(2\pi)^n}\int e^{ix\xi}\frac{\partial}{\partial \xi_j}a(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

Donc le commutateur $[\operatorname{Op}(a), x_j]$ est bien un opérateur pseudo-différentiel de symbole $-i\frac{\partial}{\partial \xi_j}a$.

Exercice 3

1. Montrons que $(a_\varepsilon)_{0\leq\varepsilon\leq 1}$ est bornée dans S^0. On fixe α et β dans $\mathbb{R}^n$.
Pour $\varepsilon = 0$, si $\beta \neq 0$, on a :

$$\forall\, x, \xi, \quad \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a_\varepsilon(x,\xi) = 0$$

et si $\beta = 0$, en utilisant que $a \in S^0$, on a l'existence d'une constante $C_\alpha > 0$ telle que :

$$\forall\, x, \xi, \quad (1+|\xi|)^{|\beta|} \left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a_0(x,\xi)\right| = \left|\partial_x^\alpha a(x,0)\right| \leq C_\alpha.$$

Soit maintenant $\varepsilon \in \,]0,1]$. On a :

$$\forall\, x, \xi, \quad \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a_\varepsilon(x,\xi) = \varepsilon^{|\beta|} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \varepsilon\xi).$$

Le fait que $a \in S^0$ implique qu'il existe $C_{\alpha,\beta} > 0$ vérifiant :

$$\forall\, x, \xi, \quad \left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a_\varepsilon(x,\xi)\right| \leq \varepsilon^{|\beta|} C_{\alpha,\beta} (1+\varepsilon|\xi|)^{-|\beta|}.$$

Puis comme $\varepsilon \in \,]0,1]$ et $|\beta| \geq 0$,

$$\begin{aligned} \forall\, \xi, \quad (1+|\xi|)^{|\beta|} &= \left(1 + \varepsilon|\xi|\frac{1}{\varepsilon}\right)^{|\beta|} \\ &\leq \left(\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon|\xi|\frac{1}{\varepsilon}\right)^{|\beta|} \leq \frac{1}{\varepsilon^{|\beta|}}(1+\varepsilon|\xi|)^{|\beta|}. \end{aligned}$$

En combinant les deux estimations précédentes, on en déduit que :

$$\forall\, x, \xi, \quad (1+|\xi|)^{|\beta|} \left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a_\varepsilon(x,\xi)\right| \leq C_{\alpha,\beta},$$

majoration indépendante de $\varepsilon \in \,]0,1]$.
Finalement, on obtient l'existence d'une constante $C'_{\alpha,\beta} > 0$ telle que

$$\sup_{0 \leq \varepsilon \leq 1} p^0_{\alpha,\beta}(a_\varepsilon) \leq C'_{\alpha,\beta}.$$

2. On va commencer par montrer que pour $m \in \,]0,1]$, $\varepsilon \in \,]0,1]$ et α, $\beta \in \mathbb{N}^n$, on a :

$$p^m_{\alpha,\beta}(a_\varepsilon - a_0) \leq C_{\alpha,\beta,m}\, \varepsilon^m$$

où $C_{\alpha,\beta,m} > 0$ est une constante dépendant de α, β et m.
On fixe $m \in \,]0,1]$, $\varepsilon \in \,]0,1]$. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Si $\beta = 0$, en utilisant la formule de Taylor, on a :

$$\begin{aligned} \forall\, x, \xi, \quad \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (a_\varepsilon - a_0)(x,\xi) &= \partial_x^\alpha (a_\varepsilon - a_0)(x,\xi) \\ &= \varepsilon\xi \cdot \int_0^1 \nabla_\xi \partial_x^\alpha a(x, t\varepsilon\xi)\, dt. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $a \in S^0$, on obtient :

$$\begin{aligned} \forall\, x, \xi, \quad \left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (a_\varepsilon - a_0)(x,\xi)\right| &\leq C_{\alpha,\beta}\, \varepsilon|\xi| \int_0^1 (1+t\varepsilon|\xi|)^{-1}\, dt \\ &\leq C_{\alpha,\beta} \int_0^{\varepsilon|\xi|} \frac{ds}{1+s} = C_{\alpha,\beta}\, \log(1+\varepsilon|\xi|). \end{aligned}$$

On utilise ensuite que pour tout $m \in]0,1]$, il existe une constante $C_m > 0$ telle que pour tout $x \geq 0$, $\log(1+x) \leq C_m x^m$. D'où

$$\forall x, \xi, \quad \left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (a_\varepsilon - a_0)(x,\xi)\right| \leq C_{\alpha,\beta,m}\, \varepsilon^m |\xi|^m \leq C_{\alpha,\beta,m}\, \varepsilon^m (1+|\xi|)^m.$$

Ainsi, on obtient : $p^m_{\alpha,\beta}(a_\varepsilon - a_0) \leq C_{\alpha,\beta,m}\, \varepsilon^m$. Si $\beta \neq 0$, on a $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a_0 = 0$ et toujours en utilisant le fait que $a \in S^0$,

$$\forall x, \xi, \quad \left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a_\varepsilon(x,\xi)\right| \leq C_{\alpha,\beta}\, \varepsilon^{|\beta|}(1+\varepsilon|\xi|)^{-|\beta|}.$$

D'autre part, $|\beta| \geq 1 \geq m$ (donc $|\beta| - m \geq 0$) et $\varepsilon \in]0,1]$ impliquent que

$$\forall \xi, \quad (1+|\xi|)^{|\beta|-m} = \left(1+\varepsilon|\xi|\frac{1}{\varepsilon}\right)^{|\beta|-m} \leq \frac{1}{\varepsilon^{|\beta|-m}}(1+\varepsilon|\xi|)^{|\beta|-m}.$$

Finalement, on obtient

$$p^m_{\alpha,\beta}(a_\varepsilon - a_0) \leq C_{\alpha,\beta} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \left(\varepsilon^{|\beta|}(1+\varepsilon|\xi|)^{-|\beta|}\frac{1}{\varepsilon^{|\beta|-m}}(1+\varepsilon|\xi|)^{|\beta|-m}\right) \leq C_{\alpha,\beta}\, \varepsilon^m.$$

Si $m > 1$, on remarque que si $m' \in]0,1]$, on a pour tous α, $\beta \in \mathbb{N}^n$: $p^m_{\alpha,\beta} \leq p^{m'}_{\alpha,\beta}$. On en déduit que pour tous $m > 0$, $\varepsilon \in]0,1]$ et α, $\beta \in \mathbb{N}^n$, il existe $C_{\alpha,\beta,m} > 0$ et $\mu > 0$ tels que $p^m_{\alpha,\beta}(a_\varepsilon - a_0) \leq C_{\alpha,\beta,m}\, \varepsilon^\mu$, ce qui nous permet de conlure.

Exercice 4

1. Soit $M > 0$ tel que $\chi = 0$ en-dehors de $B(0,M)$. Soit $M' > 0$ tel que $\chi = 1$ sur $B(0,M')$.
Soit j fixé.
Pour tous α, β :

$$\begin{aligned}\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \tilde{a}_j &= \partial_\xi^\beta \left[(1-\chi(\varepsilon_j\xi))\partial_x^\alpha a_j\right] \\ &= \sum_{\gamma\leq\beta} n_\gamma \partial_\xi^\gamma[1-\chi(\varepsilon_j\xi)](\partial_\xi^{\beta-\gamma}\partial_x^\alpha a_j)\end{aligned}$$

où les n_γ sont des entiers.
Pour tout multi-indice $\gamma \neq 0$:

$$\partial_\xi^\gamma[1-\chi(\varepsilon_j\xi)] = -\varepsilon_j^{|\gamma|}(\partial^\gamma\chi)(\varepsilon_j\xi),$$

ce qui entraîne, pour $\varepsilon_j < M$:

$$\begin{aligned}\left|\partial_\xi^\gamma[1-\chi(\varepsilon_j\xi)]\right| &\leq \varepsilon_j^{|\gamma|}\mathbb{1}_{B(0,M/\varepsilon_j)}(\xi)\|\partial^\gamma\chi\|_\infty \\ &\leq \varepsilon_j^{|\gamma|}\|\partial^\gamma\chi\|_\infty\left(\frac{1+|\xi|}{1+M/\varepsilon_j}\right)^{-|\gamma|+1} \\ &\leq \varepsilon_j^{|\gamma|}\|\partial^\gamma\chi\|_\infty\left(\frac{1+|\xi|}{2M\varepsilon_j}\right)^{-|\gamma|+1} \\ &\leq \varepsilon_j^{|\gamma|}(2M)^{|\gamma|-1}\|\partial^\gamma\chi\|_\infty\,(1+|\xi|)^{-|\gamma|+1}\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}|1-\chi(\varepsilon_j\xi)| &\leq (1+\|\chi\|_\infty)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n-B(0,M'/\varepsilon_j)}(\xi)\\ &\leq (1+\|\chi\|_\infty)(1+|\xi|)\left(\frac{\varepsilon_j}{M'}\right)\end{aligned}$$

Donc, en utilisant le fait que, pour tous γ et β, il existe une constante D telle que

$$\left|\partial_\xi^{\beta-\gamma}\partial_x^\alpha a_j\right| \leq D(1+|\xi|)^{m_j-|\beta|+|\gamma|},$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\left|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta \tilde{a}_j\right| &\leq n_0|1-\chi(\varepsilon_j\xi)|(\partial_\xi^\beta\partial_x^\alpha a_j) + \varepsilon_j\sum_{0\neq\gamma\leq\beta} n_\gamma C_\gamma(1+|\xi|)^{-|\gamma|+1}\left|\partial_\xi^{\beta-\gamma}\partial_x^\alpha a_j\right|\\ &\leq \varepsilon_j C(1+|\xi|)^{m_j-|\beta|+1}\end{aligned}$$

où C est une constante indépendante de ε_j (mais dépendant de α et β).
En prenant ε_j assez petit, on peut donc avoir, pour tous α,β tels que $|\alpha|\leq j$, $|\beta|\leq j$:

$$\left|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta \tilde{a}_j\right| \leq \frac{1}{2^j}(1+|\xi|)^{1+m_j-|\beta|}.$$

Si, pour tout j, on choisit ε_j de cette manière, alors, pour tous α,β, la propriété voulue est bien vérifiée dès que $j\geq\max(|\alpha|,|\beta|)$.

2. D'après la question 1., pour tous α,β, la série $\sum_{j\in\mathbb{N}}\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\tilde{a}_j$ converge uniformément sur tout compact.

3. Montrons d'abord que, pour tout k, $\sum_{j\geq k}\tilde{a}_j\in S^{m_k}$.
Pour tout $j\geq k$, $\tilde{a}_j$ et a_j coïncident en-dehors d'un certain compact donc, puisque $a_j\in S^{m_j}$, $\tilde{a}_j$ aussi (d'après l'exercice 1). Comme $m_j\leq m_k$, cela entraîne en particulier $a_j\in S^{m_k}$.
Soient α,β quelconques. Soit J assez grand pour que la propriété de la question 1. soit vérifiée si $j\geq J$ (pour les α et β fixés).
La fonction $\sum_{k\leq j<J}\tilde{a}_j$ est un symbole de S^{m_k} donc $\sum_{k\leq j<J}\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\tilde{a}_j$ décroît au pire en $(1+|\xi|)^{m_k-|\beta|}$.
Montrons qu'on obtient la même décroissance pour $\sum_{j\geq J}\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\tilde{a}_j$:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j\geq J}\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\tilde{a}_j\right| &\leq \sum_{j\geq J}\frac{1}{2^j}(1+|\xi|)^{1+m_j-|\beta|}\\ &\leq \sum_{j\geq J}\frac{1}{2^j}(1+|\xi|)^{1+m_{k+1}-|\beta|}\\ &= \frac{1}{2^{J-1}}(1+|\xi|)^{1+m_{k+1}-|\beta|}\\ &\leq \frac{1}{2^{J-1}}(1+|\xi|)^{m_k-|\beta|}.\end{aligned}$$

Les deux remarques précédentes impliquent que, pour une constante C assez grande :

$$\left|\sum_{j\geq k}\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\tilde{a}_j\right| \leq C(1+|\xi|)^{m_k-|\beta|}.$$

Comme ceci est vrai pour α et β quelconques, on en déduit que $\sum_{j\geq k} \tilde{a}_j$ est un élément de S^{m_k}.
On conclut en remarquant que $\sum_{j<k}(\tilde{a}_j - a_j)$ est un symbole de S^{m_0} dont le support est compact en ξ. C'est donc, d'après l'exercice 1, un symbole de $S^{-\infty}$. Ainsi, $a - \sum_{j<k} a_j$ est la somme d'un symbole de $S^{-\infty}$ et d'un symbole de S^{m_k}. C'est alors un élément de S^{m_k}.

Exercice 5

1. On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Op}(b) - \mathrm{Op}(b') &= \mathrm{Op}(b')\,\mathrm{Op}(a)\,\mathrm{Op}(b) - (\mathrm{Op}(b')\,\mathrm{Op}(a) - \mathrm{Id})\,\mathrm{Op}(b) \\
&\quad - \mathrm{Op}(b')\,\mathrm{Op}(a)\,\mathrm{Op}(b) + \mathrm{Op}(b')(\mathrm{Op}(a)\,\mathrm{Op}(b) - \mathrm{Id}) \\
&= \mathrm{Op}(b')(\mathrm{Op}(a)\,\mathrm{Op}(b) - \mathrm{Id}) - (\mathrm{Op}(b')\,\mathrm{Op}(a) - \mathrm{Id})\,\mathrm{Op}(b) \\
&\in \mathrm{Op}(S^{-\infty}) + \mathrm{Op}(S^{-\infty}) = \mathrm{Op}(S^{-\infty}).
\end{aligned}$$

2. On sait que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Op}(a)\,\mathrm{Op}(b) - \mathrm{Id} &= \mathrm{Op}(ab) - \mathrm{Id} + \text{reste dans } \mathrm{Op}(S^{-1}) \\
&= \mathrm{Op}(ab - 1) + \text{reste dans } \mathrm{Op}(S^{-1}).
\end{aligned}$$

Puisque $\mathrm{Op}(a)\,\mathrm{Op}(b) - \mathrm{Id} \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$, cela entraîne que $\mathrm{Op}(ab-1)$ appartient à $\mathrm{Op}(S^{-1})$. En particulier, il existe A tel que, pour tout (x,ξ) :

$$\begin{aligned}
&|a(x,\xi)b(x,\xi) - 1| \leq A(1+|\xi|)^{-1} \\
\Rightarrow \quad &|a(x,\xi)b(x,\xi)| \geq 1/2 \text{ si } |\xi| \text{ est assez grand.}
\end{aligned}$$

De plus, puisque $b \in S^{-m}$, il existe B tel que, pour tout (x,ξ) :

$$\begin{aligned}
&|b(x,\xi)| \leq B(1+|\xi|)^{-m} \\
\Rightarrow \quad &|a(x,\xi)| \geq \frac{1}{2}|b(x,\xi)|^{-1} \geq \frac{1}{2B}(1+|\xi|)^m \text{ si } |\xi| \text{ est assez grand.}
\end{aligned}$$

3. Il suffit de montrer que $F(a(x,\xi)(1+|\xi|^2)^{-m/2})$ appartient à S^0.
Notons $\tilde{a} = a(x,\xi)(1+|\xi|^2)^{-m/2}$. C'est un symbole de S^0 qui vérifie :

$$|\tilde{a}(x,\xi)| \geq C \text{ si } |\xi| \text{ est assez grand.}$$

Soient α, β des multi-indices quelconques. Dès que $|\xi|$ est assez grand, on a $F \circ \tilde{a} = 1/\tilde{a}$, donc $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (F \circ \tilde{a})$ est (pour ξ assez grand) une combinaison linéaire de fonctions de la forme :

$$\frac{\prod_{j=1}^s \partial_x^{\gamma_j} \partial_\xi^{\delta_j} \tilde{a}(x,\xi)}{\tilde{a}(x,\xi)^{|\alpha|+|\beta|+1}} \qquad \text{avec} \quad \gamma_1 + ... + \gamma_s = \alpha \quad \text{et} \quad \delta_1 + ... + \delta_s = \beta.$$

Puisque $|\tilde{a}|$ est minoré et puisque $\tilde{a} \in S^0$, chacune de ces fonctions décroît au pire en $(1+|\xi|)^{-|\beta|}$.
Donc, pour tout ξ tel que $|\xi|$ est assez grand :

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (F \circ \tilde{a})(x,\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{-|\beta|}.$$

De plus, $F \circ \tilde{a}$ est une fonction bornée dont toutes les dérivées sont bornées (c'est une composition de fonctions bornées dont toutes les dérivées sont bornées). C'est donc un symbole de $S^0_{0,0}$. Par l'exercice 1, cela entraîne que $F \circ \tilde{a}$ est un symbole de S^0.

On a montré $b \in S^{-m}$. Montrons maintenant qu'on peut écrire $\mathrm{Op}(a)\,\mathrm{Op}(b) = \mathrm{Id} - R$ avec $R \in \mathrm{Op}(S^{-1})$. On sait que $\mathrm{Op}(a)\,\mathrm{Op}(b) = \mathrm{Op}(ab) + S$ avec $S \in \mathrm{Op}(S^{-1})$. Or $a(x,\xi)b(x,\xi) = 1$ si $|\xi|$ est assez grand. Donc $ab - 1$ est un symbole dont le support est compact en ξ. D'après l'exercice 1, c'est un élément de $S^{-\infty}$. Donc $\mathrm{Op}(a)\,\mathrm{Op}(b) = \mathrm{Op}(1) + \mathrm{Op}(ab-1) + S = \mathrm{Id} + \mathrm{Op}(ab-1) + S$. C'est bien de la forme $\mathrm{Id} - R$ où $R = -\mathrm{Op}(ab-1) - S \in \mathrm{Op}(S^{-1}) + \mathrm{Op}(S^{-\infty}) = \mathrm{Op}(S^{-1})$.

4. Pour tout $k \geq 0$, soit $r_k \in S^{-k}$ le symbole associé à R^k.
Soit $g \in S^0 \sim \sum_{k\geq 0} r_k$. Un tel symbole existe d'après l'exercice 4.
On pose $B = \mathrm{Op}(b)\,\mathrm{Op}(g) \in \mathrm{Op}(S^{-m})$. Pour tout $K \in \mathbb{N}^*$, par définition de g, $g = r_0 + ... + r_K + s$ avec $s \in S^{-(K+1)}$ donc :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Op}(a)B &= \mathrm{Op}(a)\,\mathrm{Op}(b)(\mathrm{Id} + R + ... + R^K + \mathrm{Op}(s)) \\
&= (\mathrm{Id} - R)(\mathrm{Id} + R + ... + R^K + \mathrm{Op}(s)) \\
&= \mathrm{Id} - R^{K+1} + (\mathrm{Id} - R)\,\mathrm{Op}(s) \\
&= \mathrm{Id} - T
\end{aligned}$$

avec $T \in \mathrm{Op}(S^{-(K+1)})$.
Puisque c'est vrai pour tout K, $\mathrm{Op}(a)B - \mathrm{Id} \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$.
La construction de l'inverse à gauche est identique. En effet, on a aussi $\mathrm{Op}(b)\,\mathrm{Op}(a) = \mathrm{Id} - R$ avec $R \in \mathrm{Op}(S^{-1})$ (pour un R éventuellement différent de celui de la question 3.). En définissant g comme précédemment, on a, pour la même raison, $\mathrm{Op}(g)\,\mathrm{Op}(b)\,\mathrm{Op}(a) - \mathrm{Id} \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$.

Exercice 6

1. Soit $\chi : \mathbb{R}^n \to [0;1]$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact qui vaut 1 au voisinage de 0.
Pour tout k, on pose $u_k(x) = u(x)(1 - \chi(2^k(x - x_0)))$. On a bien $u_k(x) = 0$ au voisinage de x_0 et $\|u_k - u\|_2 \to 0$ puisque :

$$\begin{aligned}
\|u_k - u\|_2 &= \|u\chi(2^k(. - x_0))\|_2 \\
&\leq \|u_{|2^{-k}\mathrm{Supp}(\chi)+x_0}\|_2 \to 0.
\end{aligned}$$

Comme P est local, $P(u_k)(x_0) = 0$ pour tout k.
De plus, P est un opérateur continu de L^2 vers H^{-m} donc, d'après l'indication, P est un opérateur continu de L^2 vers $\mathcal{C}^0_b(\mathbb{R}^n)$. En particulier, la suite $(P(u_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $P(u)$ dans $\mathcal{C}^0_b(\mathbb{R}^n)$. Donc :

$$P(u)(x_0) = \lim_k P(u_k)(x_0) = 0.$$

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, P^k est un opérateur local d'ordre km. Pour tout k assez grand, on a $km < -n/2$ et donc, par la question 1., $P^k = 0$.
D'après la question 3.a) de l'exercice 7, cela entraîne que P est dans $\mathrm{Op}(S^{-\infty})$. Donc, d'après la question 1., puisque P est local, $P = 0$.

3. a) De façon générale, une distribution à support au voisinage de x_0 est une somme finie de $\delta^{(i)}$.

b) De même qu'à la question 1., $u \mapsto Pu$ est une application continue de $H^{n/2+k}$ vers $\mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, puisque P envoie continûment $H^{n/2+k}$ vers $H^{n/2+k-m}$, ce qui s'injecte vers $\mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^n)$.
Donc $u \in H^{n/2+k} \mapsto Pu(x_0) \in \mathbb{C}$ est une application continue. Le lemme qui suit permet de conclure.

Lemme. *Soit A un ensemble fini de multi-indices. Pour tout $i \in A$, on suppose $a_i \in \mathbb{C}$ fixé. Si l'application $G : u \in H^{n/2+k} \mapsto \sum_i a_i \delta^{(i)} u \in \mathbb{C}$ est continue, alors $a_i = 0$ pour tout i tel que $|i| > k$.*

Démonstration. On peut supposer $x_0 = 0$. Soit $M = \max\{|i|, a_i \neq 0\}$.
Soit $u \in H^{n/2+k}$ tel que $\sum_{|i|=M} a_i \delta^{(i)} u \neq 0$. Pour tout $\lambda \geq 1$, on pose $u_\lambda : x \to u(\lambda x)$.
On vérifie qu'il existe une constante $C_u > 0$ telle que $\|u_\lambda\|_{H^{n/2+k}} \sim \lambda^k C_u$ pour $\lambda \to +\infty$. D'autre part, $G(u_\lambda) \sim \lambda^M D_u$ lorsque $\lambda \to +\infty$, où $D_u = \sum_{|i|=M} a_i \delta^{(i)} u$.
On doit donc avoir, puisque G est continue sur $H^{n/2+k}$, $M \leq k$. □

c) D'après les questions précédentes, on a $P = \sum_{|\alpha| \leq K} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha$ pour un certain $K \in \mathbb{N}^*$ et des fonctions a_α.
Il faut montrer que les a_α sont $\mathcal{C}^\infty$ et que $K \leq k-1$.
Si u est une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ qui vaut 1 sur un ouvert borné Ω, on a, pour tout $x \in \Omega$, $Pu(x) = a_0(x)$. Comme Pu est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, cela entraîne que a_0 est $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω. Comme Ω peut être quelconque, a_0 est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.
On procède ensuite par récurrence pour montrer que les a_α sont $\mathcal{C}^\infty$. En effet, si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ coïncide avec x^α, $|\alpha| \geq 1$ sur un ouvert borné Ω, on a, pour tout $x \in \Omega$:

$$Pu(x) = a_\alpha(x) + \sum_{\beta < \alpha} a_\beta(x)(\partial_x^\beta u)(x)$$

donc a_α est $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω si les a_β le sont pour tout $\beta < \alpha$. Comme Ω est quelconque, a_α est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.
Cela montre que les a_α sont $\mathcal{C}^\infty$. Le symbole associé à P est $(x, \xi) \mapsto \sum_{|\alpha| \leq K} a_\alpha(x)(i\xi)^\alpha$. Ce symbole ne peut être d'ordre m que si $|\alpha| \leq m < k$ pour tout α vérifiant $a_\alpha \neq 0$. Donc $a_\alpha = 0$ si $|\alpha| > k-1$.

Exercice 7

1. Supposons d'abord $a \in S^m$ et montrons que la propriété (ii) est vérifiée. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Pour alléger les notations, on suppose $\beta = 0$ (pour traiter le cas $\beta \neq 0$, il suffira d'appliquer à $\partial_x^\beta a$ le résultat pour $\beta = 0$).
La fonction $\partial_\xi^\alpha a_\lambda$ est une combinaison linéaire de fonctions de la forme $\lambda^{|\alpha-\gamma|} \partial^\gamma \chi(\xi) \partial_\xi^{\alpha-\gamma} a(x, \lambda\xi)$, avec $\gamma \leq \alpha$. Puisque $a \in S^m$, il existe des constantes D_γ telles que ces termes sont majorés par :

$$\begin{aligned} D_\gamma \lambda^{|\alpha-\gamma|}(1+\lambda|\xi|)^{m-|\alpha-\gamma|} \mathbb{1}_{\mathrm{Supp}(\chi)}(\xi) &\leq D_\gamma \lambda^{|\alpha-\gamma|} \max\left((1+\lambda/2)^{m-|\alpha-\gamma|}, (1+2\lambda)^{m-|\alpha-\gamma|}\right) \\ &\leq \tilde{D}_\gamma \lambda^m \end{aligned}$$

car $\lambda \geq 1$ donc la propriété (ii) est vérifiée.
Supposons maintenant (ii) vérifiée et montrons que a est dans S^m. Soit β fixé. On va montrer par récurrence sur k que, si $|\alpha| \leq k$, alors :

$$\forall\, x,\ |\xi|\ \geq 1, \quad \left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi)\right| \leq C(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}$$

pour une certaine constante C.

Pour $k=0$, c'est vrai. En effet, si $|\xi| \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\left|\partial_x^\beta a(x,\xi)\right| &= (\chi(\xi/|\xi|))^{-1}|\partial_x^\beta a_{|\xi|}(x,\xi/|\xi|)| \\
&\leq \Big(\inf_{|\xi|=1}\chi(\xi)\Big)^{-1}|\partial_x^\beta a_{|\xi|}(x,\xi/|\xi|)| \\
&\leq \Big(\inf_{|\xi|=1}\chi(\xi)\Big)^{-1}C_0|\xi|^m \\
&\leq D_0(1+|\xi|)^m.
\end{aligned}$$

Supposons que c'est vrai pour k. Soit α tel que $|\alpha| = k+1$. Alors $\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta a_\lambda$ est une somme de fonctions de la forme $\lambda^{|\alpha-\gamma|}\partial^\gamma\chi(\xi)\partial_\xi^{\alpha-\gamma}\partial_x^\beta a(x,\lambda\xi)$, avec $\gamma \leq \alpha$.
Pour tout $\gamma > 0$, par l'hypothèse de récurrence et en raisonnant comme dans le début de la question, ce terme est majoré par $C\lambda^m$ pour une certaine constante C.
Donc $\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta a_\lambda(x,\xi) = \lambda^{k+1}\chi(\xi)\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta a(x,\lambda\xi) + O(\lambda^m)$. En utilisant la propriété (ii), cela implique :

$$\chi(\xi)\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta a(x,\lambda\xi) = O(\lambda^{m-(k+1)}).$$

Donc, pour tout ξ tel que $|\xi| \geq 1$, en raisonnant comme dans le cas $k=0$:

$$\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta a(x,\xi) = \partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta a(x,|\xi|\xi/|\xi|), = O(|\xi|^{m-(k+1)}),$$

ce qui démontre l'hypothèse de récurrence au rang $k+1$.
De plus, par hypothèse, $a \in S^\nu$ donc d'après l'exercice 1, $a \in S^m$.
2. a) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ quelconque. Pour tout $h \in \mathbb{R}^n$:

$$\left|f(x+h) - \sum_{|\alpha|<k} h^\alpha c_\alpha \partial^\alpha f(x)\right| \leq C_h \sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|_\infty$$

où les constantes c_α sont données par la formule de Taylor et C_h est une constante qui dépend de h.
Donc :

$$\left|\sum_{|\alpha|<k} h^\alpha c_\alpha \partial^\alpha f(x)\right| \leq \|f\|_\infty + C_h \sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|_\infty.$$

Si on fixe $h_1, ..., h_K$ indépendamment de f, tels que $L : (a_\alpha)_{|\alpha|<k} \mapsto (\sum_{|\alpha|<k} h_j^\alpha c_\alpha a_\alpha)_{j\leq K}$ est inversible, on a, pour tout x :

$$\left|L((\partial^\alpha f(x))_{|\alpha|<k})\right| \leq \|f\|_\infty + C_{h_1,\dots,h_K} \sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|_\infty$$

ce qui entraîne, en utilisant la continuité de L^{-1}, que, pour tout α vérifiant $|\alpha| < k$:

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq D\left(\|f\|_\infty + \sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|_\infty\right)$$

pour une constante D indépendante de f.
b) Posons $g : x \mapsto f(\lambda x)$, pour un $\lambda > 0$ à choisir plus tard. Soit β fixé.

Alors :

$$\begin{aligned}\lambda^{|\beta|}\|\partial^\beta f\|_\infty &= \|\partial^\beta g\|_\infty \\ &\le C\left(\|g\|_\infty + \sum_{|\alpha|=k}\|\partial^\alpha g\|_\infty\right) \\ &\le C\left(\|f\|_\infty + \lambda^k \sum_{|\alpha|=k}\|\partial^\alpha f\|_\infty\right)\end{aligned}$$

ce qui entraîne que, pour tout $\lambda > 0$:

$$\|\partial^\beta f\|_\infty \le C\left(\lambda^{-|\beta|}\|f\|_\infty + \lambda^{k-|\beta|}\sum_{|\alpha|=k}\|\partial^\alpha f\|_\infty\right)$$

Pour $\lambda = \|f\|_\infty^{1/k}\left(\sum_{|\alpha|=k}\|\partial^\alpha f\|_\infty\right)^{-1/k}$, on obtient le résultat voulu.
c) Soit $\varepsilon > 0$ fixé.
D'après la question 1., pour tous α, β, il existe C tel que :

$$\|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a_\lambda\|_\infty \le C\lambda^m.$$

De plus, $\|a_\lambda\|_\infty \le C\lambda^\mu$ pour une certaine constante μ.
Pour tous α, β, en utilisant ces remarques et la question b), on a, si on note $|\alpha| + |\beta| = k_1$ et $k_2 \ge k_1$:

$$\begin{aligned}\|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a_\lambda\|_\infty &\le C\|a_\lambda\|_\infty^{1-k_1/k_2}\left(\sum_{|\gamma|=k_2}\|\partial^\gamma a_\lambda\|_\infty\right)^{k_1/k_2} \\ &\le \tilde{C}(\lambda^\mu)^{1-k_1/k_2}(\lambda^m)^{k_1/k_2} \\ &= \tilde{C}\lambda^{\mu+(m-\mu)k_1/k_2}\end{aligned}$$

Si on prend k_2 assez grand pour que $\mu + (m-\mu)k_1/k_2 \le \mu + \varepsilon$, on obtient :

$$\|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a_\lambda\|_\infty = O(\lambda^{\mu+\varepsilon})$$

D'après la question 1., cela implique $a \in S^{\mu+\varepsilon}$.
3. a) Supposons par l'absurde que $A \in \mathrm{Op}(S^m)$ mais $A \notin \mathrm{Op}(S^{m-1/2k})$.
Soit $a \in S^m$ le symbole de A. D'après les résultats vus en cours sur le calcul symbolique, $A^k = \mathrm{Op}(a^k) + R$ avec $R \in \mathrm{Op}(S^{km-1})$.
Comme $A^k = 0$, on doit avoir $a^k \in S^{km-1}$, ce qui implique en particulier :

$$|a(x,\xi)|^k \le C(1+|\xi|)^{km-1} \quad \iff \quad |a(x,\xi)| \le C^{1/k}(1+|\xi|)^{m-1/k}$$

D'après la question 2.c), a appartient donc à $S^{m-1/k+\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$. En particulier, $a \in S^{m-1/2k}$. C'est absurde.
b) Soient χ une fonction non-nulle à support dans $[0;1]$ et ψ une fonction non-nulle à support dans $[1;2]$ telle que $\psi(3/2) \neq 0$. Soit $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\chi \star g(3/2) \neq 0$. L'opérateur $A : u \mapsto \psi((u\chi) \star g)$ est un opérateur pseudo-différentiel.
Il est nilpotent : pour toute u, $\chi(Au) = 0$ puisque $\chi\psi = 0$. Donc $A^2 u = 0$.
De plus, il n'est pas trivial. En effet, si u vaut 1 sur $[0;1]$, $Au = \psi(\chi \star g)$, ce qui est non-nul en $3/2$.