Corrigé TD n°3.

Exercice 1

1. Soit $\chi \in \mathcal{C}^0_c(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, telle que $\chi(0,0) = 1$.
D'après la définition des intégrales oscillantes :

$$\begin{aligned}
\int e^{-iy.x} x_j a(x,y) dxdy &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int e^{-iy.x} x_j a(x,y)\chi(\varepsilon x, \varepsilon y) dxdy \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} i \int \partial_{y_j}[e^{-iy.x}] a(x,y)\chi(\varepsilon x, \varepsilon y) dxdy \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} -i \int e^{-iy.x} \partial_{y_j}[a(x,y)\chi(\varepsilon x, \varepsilon y)] dxdy \\
&= -i \lim_{\varepsilon \to 0} \int e^{-iy.x} \partial_{y_j} a(x,y)\chi(\varepsilon x, \varepsilon y) dxdy \\
&\quad - i \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \int e^{-iy.x} a(x,y) \partial_{y_j}\chi(\varepsilon x, \varepsilon y) dxdy.
\end{aligned}$$

La première limite vaut $-i \int e^{-iy.x} \partial_{y_j} a(x,y) dxdy$ (par définition de cette intégrale oscillante). Pour le deuxième terme, toujours par la définition des intégrales oscillantes :

$$-i \lim_{\varepsilon \to 0} \int e^{-iy.x} a(x,y) \partial_{y_j}\chi(\varepsilon x, \varepsilon y) dxdy = -i\, \partial_{y_j}\chi(0,0) \int e^{-iy.x} a(x,y) dxdy$$

d'où

$$-i \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \int e^{-iy.x} a(x,y) \partial_{y_j}\chi(\varepsilon x, \varepsilon y) dxdy = 0.$$

Cela donne le résultat voulu.
2. On se contente de montrer $\frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{-iy.x} a(x) dydx = a(0)$. Par symétrie entre les variables y et x, cela suffit.
Lorsque m est suffisamment négatif, a est dans L^1 et $\hat{a}$ est également dans L^1. On a alors :

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{-iy.x} a(x) dydx = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \hat{a}(y) dy = a(0).$$

Pour conclure, il suffit donc de démontrer que si l'égalité est vraie pour tout $a \in A^m$, alors elle est vraie pour tout $a \in A^{m+1}$. Supposons alors qu'elle est vraie sur pour tout $a \in A^m$ et supposons fixé $a \in A^{m+1}$.
Posons $b(x) = a(x)(1 + |x|^2)^{-1}$. On a $b \in A^{m-1} \subset A^m$. En utilisant la question 1. :

$$\begin{aligned}
\int e^{-iy.x} a(x) dydx &= \int e^{-iy.x} b(x) dydx + \sum_j \int e^{-iy.x} x_j^2 b(x) dydx \\
&= b(0) - i \sum_j \int e^{-iy.x} \partial_{y_j}\left[x_j b(x)\right] dydx \\
&= b(0) = a(0).
\end{aligned}$$

3. Lorsque $\beta = 0$, c'est une conséquence de la question 2., appliquée à $a(y) = y^\alpha/(\alpha!)$.
Procédons maintenant par récurrence sur $|\beta|$, en utilisant la question 1. On note $\delta_j = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ (avec le 1 en position j). On a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-iy.x}\frac{y^\alpha x^{\beta+\delta_j}}{\alpha!(\beta+\delta_j)!}dydx &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-iy.x}x_j\frac{y^\alpha x^{\beta}}{\alpha!(\beta+\delta_j)!}dydx \\
&= \frac{-i}{(2\pi)^n}\int e^{-iy.x}\partial_{y_j}\left[\frac{y^\alpha x^{\beta}}{\alpha!(\beta+\delta_j)!}\right]dydx \\
&= \frac{-i}{(2\pi)^n}\int e^{-iy.x}\alpha_j\frac{y^{\alpha-\delta_j} x^{\beta}}{\alpha!(\beta+\delta_j)!}dydx \\
&= \mathbb{1}_{\alpha_j>0}\frac{-i}{(2\pi)^n}\int e^{-iy.x}\frac{y^{\alpha-\delta_j} x^{\beta}}{(\alpha-\delta_j)!(\beta+\delta_j)!}dydx \\
&= \mathbb{1}_{\alpha_j>0}\frac{(-i)^{|\alpha-\delta_j|+1}}{(\beta+\delta_j)!}\mathbb{1}_{\beta=\alpha-\delta_j} \\
&= \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!}\mathbb{1}_{\beta+\delta_j=\alpha}.
\end{aligned}$$

Exercice 2

1. On a $\mathrm{Id} + R = \mathrm{Op}(a)\,\mathrm{Op}(b) = \mathrm{Op}(ab) + \mathrm{Op}(r)$ avec $r \in S^{-1}$, donc $\mathrm{Op}(ab-1) \in \mathrm{Op}(S^{-1})$, ce qui entraîne $b' = b - 1/a = (ab-1)/a \in S^{-m-1}$, puisque $1/a \in S^{-m}$ (voir question 3. de l'exercice 5 du TD 2).
2. On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Id} + R &= \mathrm{Op}(a)\,\mathrm{Op}(1/a + b') \\
&= \mathrm{Op}(a)\,\mathrm{Op}(1/a) + \mathrm{Op}(a)\,\mathrm{Op}(b') \\
&= \mathrm{Op}\left(1 + \frac{1}{i}\sum_j(\partial_{\xi_j}a)(\partial_{x_j}(1/a)) + ab'\right) + S \\
&= \mathrm{Op}\left(1 - \frac{1}{ia^2}\sum_j(\partial_{\xi_j}a)(\partial_{x_j}a) + ab'\right) + S
\end{aligned}$$

pour un $S \in \mathrm{Op}(S^{-2})$.
3. On a donc :

$$b' = \frac{1}{ia^3}\sum_j(\partial_{\xi_j}a)(\partial_{x_j}a) + c, \quad \text{avec} \quad c \in S^{-m-2}.$$

Il suffit alors de poser $b_1 = 1/a$ et $b_2 = \frac{1}{ia^3}\sum_j(\partial_{\xi_j}a)(\partial_{x_j}a)$.

Exercice 3

1. On va montrer que $b : (x, \xi) \to \frac{1-\chi(\xi)}{P(\xi)}u(x)$ appartient à A^{-m}.

Soient α et β des multi-indices.

$$\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta b(x,\xi) = \partial_\xi^\alpha \left(\frac{1-\chi(\xi)}{P(\xi)} \right) \partial_x^\beta u(x).$$

Le premier terme du produit est majoré par $C(1+|\xi|)^{-m}$ pour une certaine constante $C>0$ (à cause de la condition d'ellipticité). Le deuxième est majoré par $C_k(1+|x|)^k$ pour tout k, puisque u est à support compact.
Cela implique en particulier que, pour une certaine constante C' :

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta b(x,\xi)| \leq C'(1+|x|+|\xi|)^{-m}.$$

2. Pour tout s et pour toute u à support dans U :

$$\begin{aligned}
T(u) &= \frac{(-1)^s}{(2\pi)^n} \int (-1)^s (x_1^2 + ... + x_n^2)^s e^{ix.\xi} \frac{u(x)}{(x_1^2+...+x_n^2)^s} \frac{1-\chi(\xi)}{P(\xi)} dx d\xi \\
&= \frac{(-1)^s}{(2\pi)^n} \int (\partial_{\xi_1}^2 + ... + \partial_{\xi_n}^2)^s \left[e^{ix.\xi} \frac{u(x)}{(x_1^2+...+x_n^2)^s} \right] \frac{1-\chi(\xi)}{P(\xi)} dx d\xi \\
&= \frac{(-1)^s}{(2\pi)^n} \int e^{ix.\xi} \frac{u(x)}{(x_1^2+...+x_n^2)^s} (\partial_{\xi_1}^2 + ... + \partial_{\xi_n}^2)^s \left[\frac{1-\chi(\xi)}{P(\xi)} \right] dx d\xi.
\end{aligned}$$

La fonction $(1-\chi)P^{-1}$ appartient à S^{-m} donc, pour tout s assez grand, $(\partial_{\xi_1}^2 + ... + \partial_{\xi_n}^2)^s \left[\frac{1-\chi(\xi)}{P(\xi)} \right]$ est intégrable.
On pose alors, pour tout $x \in U$:

$$t(x) = \frac{(-1)^s}{(x_1^2+...+x_n^2)^s} \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix.\xi} (\partial_{\xi_1}^2 + ... + \partial_{\xi_n}^2)^s \left[\frac{1-\chi(\xi)}{P(\xi)} \right] d\xi.$$

La fonction t est bornée sur U ; elle appartient donc à $L^2(U)$. De plus, pour toute $u \in \mathcal{D}(U)$:

$$T(u) = \int u(x) t(x) dx$$

3. On a, pour toute fonction u :

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha T(u) &= \frac{(-1)^{|\alpha|}}{(2\pi)^n} \int e^{ix.\xi} \frac{1-\chi(\xi)}{P(\xi)} \partial^\alpha u(x) dx d\xi \\
&= \frac{i^{|\alpha|}}{(2\pi)^n} \int e^{ix.\xi} \xi^\alpha \frac{1-\chi(\xi)}{P(\xi)} u(x) dx d\xi,
\end{aligned}$$

ce qui s'identifie à une fonction de $L^2(U)$ pour la même raison que précédemment.
Sur tout ouvert borné U ne contenant pas 0, T s'identifie à une fonction L^2, qui admet des dérivées L^2 à tout ordre ; en particulier, T s'identifie donc à une fonction $\mathcal{C}^\infty$. Sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$, T s'identifie donc à une fonction $\mathcal{C}^\infty$.

4. On a :

$$\begin{aligned}
P(D)Tu &= T(P(-D)u) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix.\xi}\frac{1-\chi(\xi)}{P(\xi)}\left[P(-D)u\right](x)dxd\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int P(D_x)\left[e^{ix.\xi}\frac{1-\chi(\xi)}{P(\xi)}\right]u(x)dxd\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix.\xi}P(\xi)\frac{1-\chi(\xi)}{P(\xi)}u(x)dxd\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix.\xi}u(x)dxd\xi - \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix.\xi}\chi(\xi)u(x)dxd\xi \\
&= u(0) - \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix.\xi}\chi(\xi)u(x)dxd\xi
\end{aligned}$$

où la dernière égalité provient de l'exercice 1.
La fonction $r : x \mapsto (2\pi)^{-n}\int e^{ix.\xi}\chi(\xi)d\xi$ est $\mathcal{C}^\infty$ (transformée de Fourier d'une fonction à support compact) et on a $P(D)T = \delta_0 + r$.

5. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Soit ϕ une fonction à support dans $B(0,\varepsilon)$, qui vaut 1 au voisinage de 0. Posons $T_\varepsilon : u \mapsto T(\phi u)$. C'est une distribution à support dans $B(0,\varepsilon)$.
De plus, pour tout j, $\partial_j T_\varepsilon(u) = \partial_j T(\phi u) + T((\partial_j\phi)u)$. La distribution $u \mapsto T((\partial_j\phi)u)$ s'identifie à une fonction de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ car $\partial_j\phi$ est nulle au voisinage de 0.
On en déduit qu'il existe une fonction $\tilde{r} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que, pour toute u, $P(D)T_\varepsilon(u) = (P(D)T)(\phi u) + \int \tilde{r}u = u(0) + \int(\tilde{r} + \phi r)u$.
Donc $P(D)T_\varepsilon = \delta_0 + (\tilde{r} + \phi r)$.

Exercice 4

1. La fonction u étant bornée, l'hypothèse sur K implique que, pour tout x, la fonction $y \to K(x,y)u(y)$ est dans L^1, d'intégrale bornée par $A||u||_\infty$.
Donc $Pu(x)$ est bien défini et $|Pu(x)| \leq A||u||_\infty$.

2. a) On utilise, dans la définition de $Pu(x)$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les fonctions $f(y) = \sqrt{|K(x,y)|}$ et $g(y) = \sqrt{|K(x,y)|}u(y)$. Cela donne :

$$\begin{aligned}
|Pu(x)|^2 &= \left|\int f(y)g(y)dy\right|^2 \\
&\leq \left(\int |f(y)|^2dy\right)\left(\int |g(y)|^2dy\right) \\
&= \left(\int |K(x,y)|dy\right)\left(\int |K(x,y)|\,|u(y)|^2dy\right) \\
&\leq A\int |K(x,y)|\,|u(y)|^2dy
\end{aligned}$$

b) En intégrant sur x l'inégalité précédente, on trouve :

$$||Pu||_2^2 \leq A\int |K(x,y)|\,|u(y)|^2dydx \leq A^2\int |u(y)|^2dy = A^2||u||_2^2$$

L'application P est donc uniformément continue, de norme au plus A, de $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ vers L^2. Par densité, elle admet donc une unique extension continue de L^2 vers L^2, dont la norme est toujours au plus A.

Exercice 5

1. a)

$$\begin{aligned}\mathrm{Op}(a)u(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int a(x,\xi)e^{ix.\xi}\hat{u}(\xi)d\xi\\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int a(x,\xi)e^{ix.\xi}\left(\int e^{-iy.\xi}u(y)dy\right)d\xi\\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int a(x,\xi)e^{i(x-y).\xi}u(y)dyd\xi\end{aligned}$$

ce qui est bien de la forme voulue, pour $K(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int a(x,\xi)e^{i(x-y).\xi}d\xi$.
Come $|a(x,\xi)|$ est majorée par $C(1+||\xi||)^{-(n+1)}$, ce qui est une fonction intégrable, et comme u est de Schwartz, il n'y a pas de problème de convergence.
b) Puisque $a \in S^{-(n+1)}$:

$$\begin{aligned}|K(x,y)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^n}\int |a(x,\xi)|d\xi\\ &\leq C\int (1+|\xi|)^{-(n+1)}d\xi\\ &< +\infty\end{aligned}$$

Donc K est bornée.
Pour tout $j \leq n$, d'après les propriétés classiques de la transformée de Fourier :

$$(x_j - y_j)^{n+1}K(x,y) = i^{n+1}\frac{1}{(2\pi)^n}\int \partial_{\xi_j}^{n+1}a(x,\xi)e^{i(x-y).\xi}d\xi$$

Donc :

$$\begin{aligned}|x_j - y_j|^{n+1}|K(x,y)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^n}\int |\partial_{\xi_j}^{n+1}a(x,\xi)|d\xi\\ &\leq C\int (1+|\xi|)^{-2(n+1)}d\xi\\ &< +\infty\end{aligned}$$

Donc $(x,y) \to |x_j - y_j|^{n+1}K(x,y)$ est bornée. Cela entraîne que la fonction $(x,y) \to ||x-y||_{n+1}^{n+1}K(x,y)$ est bornée. Par équivalence des normes, $(x,y) \to ||x-y||_2^{n+1}K(x,y)$ est bornée. Comme on a vu que K était également bornée, $(x,y) \to (1+||x-y||^{n+1})K(x,y)$ est une fonction bornée.
c) D'après la question b), $|K|$ est majorée par $C(1+||x-y||^{n+1})^{-1}$ pour une certaine constante $C > 0$. Donc :

$$\sup_x \int |K(x,y)|dy \leq C\int \frac{1}{1+||t||^{n+1}}dt \qquad \sup_y \int |K(x,y)|dy \leq C\int \frac{1}{1+||t||^{n+1}}dt$$

D'après le lemme de Schur vu à l'exercice 1, $\mathrm{Op}(a)$ s'étend de manière unique en un opérateur borné de L^2 vers L^2.

2. Pour $k=0$, c'est la question 1.
On suppose maintenant que c'est démontré pour $k-1\geq 0$ et on le démontre pour $k\leq n$. On suppose donc $a\in S^{k-(n+1)}$.
D'après les résultats de calcul symbolique vus en cours, $\mathrm{Op}(a)^*$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $k-(n+1)$. De plus, $\mathrm{Op}(a)^*\,\mathrm{Op}(a)$ est la composition de deux opérateurs pseudo-différentiels d'ordre $k-(n+1)$. C'est donc un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $2(k-(n+1))\leq(k-1)-(n+1)$. D'après l'hypothèse de récurrence, $\mathrm{Op}(a)^*\,\mathrm{Op}(a)$ est continu de L^2 vers L^2. D'après l'indication, $\mathrm{Op}(a)$ aussi.

3. a) Soit $M>2\sup_{x,\xi\in\mathbb{R}^n}|a(x,\xi)|^2$.
On pose $c(x,\xi)=\sqrt{M-|a(x,\xi)|^2}$. Vérifions qu'il s'agit d'un symbole d'ordre 0. Pour tous multi-indices α,β, $\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta c$ est une somme de fonctions de la forme :

$$\frac{\prod_{j=1}^{s}(\partial_x^{\alpha_j}\partial_\xi^{\beta_j}a)\prod_{j=1}^{s'}\overline{(\partial_x^{\alpha'_j}\partial_\xi^{\beta'_j}a)}}{(M-|a|^2)^r}\tag{1}$$

avec $r\in\mathbb{R}$, $\alpha_1+...+\alpha_s+\alpha'_1+...+\alpha'_{s'}=\alpha$ et $\beta_1+...+\beta_s+\beta'_1+...+\beta'_{s'}=\beta$.
La fonction $M-|a|^2$ est à valeurs dans $[M/2;M]$. Elle est donc majorée et minorée. Le fait que a appartienne à S^0 implique donc qu'un terme de la forme (1) est majoré par :

$$C(1+||\xi||)^{-|\beta_1|-...-|\beta'_{s'}|}=C(1+||\xi||)^{-|\beta|}$$

ce qui montre $c\in S^0$.
D'après les résultats du cours sur le calcul symbolique, $\mathrm{Op}(c)^*\,\mathrm{Op}(c)=\mathrm{Op}(\overline{c})\,\mathrm{Op}(c)+R_1=\mathrm{Op}(|c|^2)+R_2+R_1$ avec $R_1,R_2\in\mathrm{Op}(S^{-1})$.
De plus, $\mathrm{Op}(a)^*\,\mathrm{Op}(a)=\mathrm{Op}(|a|^2)+R_3$ avec $R_3\in\mathrm{Op}(S^{-1})$.
Cela entraîne :

$$\begin{aligned}\mathrm{Op}(c)^*\,\mathrm{Op}(c)&=\mathrm{Op}(M-|a|^2)+R_2+R_1\\&=M\mathrm{Id}-\mathrm{Op}(|a|^2)+R_2+R_1\\&=M\mathrm{Id}-\mathrm{Op}(a)^*\,\mathrm{Op}(a)+R_3+R_2+R_1\end{aligned}$$

et on a bien $R_3+R_2+R_1\in\mathrm{Op}(S^{-1})$.
b) D'après la question 2. appliquée à $k=n$, R est continu de L^2 vers L^2. Pour toute fonction u, on a donc :

$$\begin{aligned}||\,\mathrm{Op}(a)u||_2^2&=\langle\mathrm{Op}(a)u,\mathrm{Op}(a)u\rangle\\&=\langle u,\mathrm{Op}(a)^*\,\mathrm{Op}(a)u\rangle\\&=\langle u,Mu-\mathrm{Op}(c)^*\,\mathrm{Op}(c)u+Ru\rangle\\&=M||u||^2-||\,\mathrm{Op}(c)u||^2+\langle u,Ru\rangle\\&\leq M||u||^2+\langle u,Ru\rangle\\&\leq(M+||R||_{L^2\to L^2})||u||^2\end{aligned}$$

donc $\mathrm{Op}(a)$ est continu sur L^2.

Exercice 6

1. Le noyau est donné par $K(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}} a(x,\xi)e^{i(x-y).\xi}d\xi$.
En intégrant par parties, on peut donner un sens à cette intégrale pour tout (x,y) tel que $x \neq y$.
2. Pour tous multi-indices α et β, la fonction $(x,y,\xi) \mapsto a(x,\xi)e^{i(x-y).\xi}$ est (α,β)-fois dérivable par rapport à (x,y). De plus, la dérivée (α,β)-ème est une combinaison linéaire de termes de la forme :

$$\partial_x^\gamma a(x,\xi)\xi^{(\alpha-\gamma)+\beta}e^{i(x-y).\xi}$$

avec $\gamma \leq \alpha$.
Puisque $a \in S^{-\infty}$, une telle combinaison linéaire est majorée par $C(1+||\xi||)^{-(n+1)}$ pour une certaine constante C, ce qui est une fonction intégrable en ξ.
On peut donc dériver sous le signe somme et K est $\mathcal{C}^\infty$.
3. D'après le deuxième théorème, $\mathrm{Op}(a)M_\psi = \mathrm{Op}(a)\,\mathrm{Op}(\psi)$ est de la forme $\mathrm{Op}(c)$ avec :

$$c \sim \sum_\alpha (\partial_\xi^\alpha a)(\partial^\alpha \psi)$$

Chaque terme de ce développement asymptotique est à support dans $\mathrm{Supp}(\psi)\times\mathbb{R}^n$. On en déduit qu'il existe $b \in S^m$ et $R \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$ tels que $b(x,\xi) = 0$ pour tout (x,ξ) tel que $x \notin \mathrm{Supp}(\psi)$ et :

$$\mathrm{Op}(a)M_\psi = \mathrm{Op}(b) + R$$

On a de même $M_\phi\,\mathrm{Op}(b) = \mathrm{Op}(c)$ avec :

$$c \sim \sum_\alpha \frac{1}{i^{|\alpha|}\alpha!}(\partial_\xi^\alpha \phi)(\partial_x^\alpha b)$$

Pour tout α, $(\partial_\xi^\alpha\phi)(\partial_x^\alpha b) = 0$, puisque, pour tout ξ, $\mathrm{Supp}\left(\partial_x^\alpha b(.,\xi)\right) \subset \mathrm{Supp}(\psi)$ et $\mathrm{Supp}\left(\partial_\xi^\alpha \phi(.,\xi)\right) \subset \mathrm{Supp}(\phi)$ et les deux supports sont donc disjoints.
Cela entraîne $c \in S^{-\infty}$. Donc $M_\phi\,\mathrm{Op}(b) \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$ et $M_\phi\,\mathrm{Op}(a)M_\psi = M_\phi\,\mathrm{Op}(b) + M_\phi R \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$.
4. On note $K(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}} a(x,\xi)e^{i(x-y).\xi}d\xi$ le noyau de $\mathrm{Op}(a)$ et K' le noyau de $M_\phi\,\mathrm{Op}(a)M_\psi$.
Intuitivement, pour une fonction $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} K'(x,y)u(y)dy &= M_\phi\,\mathrm{Op}(a)M_\psi u(x) \\
&= \phi(x)\,\mathrm{Op}(a)(\psi u)(x) \\
&= \phi(x)\int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)\psi(y)u(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\phi(x)K(x,y)\psi(y)\right)u(y)dy
\end{aligned}$$

donc on s'attend à avoir $K'(x,y) = \phi(x)K(x,y)\psi(y)$. Justifions maintenant rigoureusement ce résultat.

On note $b \in S^m$ le symbole tel que $\mathrm{Op}(a)M_\psi = \mathrm{Op}(b)$. En utilisant le fait que, pour toutes fonctions f_1, f_2, $\widehat{f_1 f_2} = (2\pi)^{-n}\hat{f}_1 \star \hat{f}_2$, on a, si u est de Schwartz :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi)^n}\int b(x,\xi)e^{ix.\xi}\hat{u}(\xi)d\xi &= \mathrm{Op}(a)M_\psi u(x)\\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int a(x,\xi')e^{ix.\xi'}\widehat{\psi u}(\xi')d\xi'\\ &= \frac{1}{(2\pi)^{2n}}\int a(x,\xi')e^{ix.(\xi'-\xi)}e^{ix.\xi}\hat{\psi}(\xi'-\xi)\hat{u}(\xi)d\xi' d\xi\end{aligned}$$

ce qui fait qu'on a :

$$b(x,\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n}a(x,.)\star(e^{-ix\cdot}\hat{\psi}(-.))(\xi)$$

En notant K'' le symbole de b, on a $K''(x,y) = \mathcal{F}^{-1}(b(x,.))(x-y)$ donc :

$$\begin{aligned}K''(x,y) &= \mathcal{F}^{-1}(a(x,.))(x-y)\mathcal{F}^{-1}(e^{-ix\cdot}\hat{\psi}(-.))(x-y)\\ &= K(x,y)\psi(y)\end{aligned}$$

Un raisonnement similaire (mais nettement plus simple) montre qu'on a aussi $K'(x,y) = \phi(x)K''(x,y)$, ce qui démontre bien :

$$K'(x,y) = \phi(x)K(x,y)\psi(y)$$

5. D'après la question 3., K' est le noyau d'un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $-\infty$. D'après la question 2., c'est une fonction $\mathcal{C}^\infty$. Puisque K est égal à K' au voisinage de (x,y), K est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de (x,y).

Exercice 7

1. a) Soit $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Comme c'est une fonction de la classe de Schwartz, $\phi\,\mathrm{Op}_\Omega(a)u = \mathrm{Op}(\phi a)u$ est une fonction de la classe de Schwartz pour toute $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Donc $\mathrm{Op}_\Omega(a)u$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω.
b) On a : $\mathrm{Op}(\phi\tilde{\phi}a)^*v = (M_\phi\,\mathrm{Op}(\tilde{\phi}a))^*v = (\mathrm{Op}(\tilde{\phi}a))^*M_\phi^*v = (\mathrm{Op}(\tilde{\phi}a))^*(\overline{\phi}v) = (\mathrm{Op}(\tilde{\phi}a))^*v$.
Et de même $(\mathrm{Op}(\phi\tilde{\phi}a))^*v = (M_{\tilde{\phi}}\,\mathrm{Op}(\phi a))^*v = (\mathrm{Op}(\phi a))^*v$. Cela entraîne l'égalité demandée.
c) Soit $u \in \mathcal{S}'(\Omega)$. On définit $\mathrm{Op}_\Omega(a)u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ par :

$$\forall\, v \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \qquad \langle \mathrm{Op}_\Omega(a)u, v\rangle = \langle u, (\mathrm{Op}(\phi a))^*v\rangle$$

où ϕ est une fonction de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ valant 1 sur le support de v.
Cette définition ne dépend pas du choix de ϕ, d'après la question précédente. Les propriétés de continuité de $(\mathrm{Op}(\phi a))^*$ font que cela définit bien une distribution.
De plus, on vérifie que cette définition coïncide avec la précédente pour $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.
2. a) Soit $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.
Soit K l'ensemble (fini) des indices k tels que $\mathrm{Supp}(u) \cap \mathrm{Supp}(\psi_k) \neq \emptyset$. On a $u = \sum_{k\in K}\psi_k u$ donc $Au = \sum_{k\in K} AM_{\psi_k}u$.

Soit $x \in \Omega$ fixé. Soit J l'ensemble (fini) des indices j tels que $x \in \mathrm{Supp}(\psi_j)$. Alors :

$$\begin{aligned} Au(x) &= \sum_{j \in J} \psi_j(x) Au(x) \\ &= \sum_{j \in J, k \in K} (M_{\psi_j} A M_{\psi_k}) u(x) \\ &= \sum_{j \in J, k \in K} A_{jk} u(x). \end{aligned}$$

Si $j \notin J$ ou $k \notin K$, $A_{jk}u(x) = 0$, donc :

$$Au(x) = \sum_{j,k \in \mathbb{N}} A_{jk} u(x).$$

b) Par hypothèse, pour tous j, k, il existe un symbole $a_{jk} \in S^m$ tel que $A_{jk} = \mathrm{Op}(a_{jk})$.
Pour tout $x \notin \mathrm{Supp}(\psi_j)$, $a_{jk}(x, .) = 0$ (puisque $A_{jk}u(x) = 0$ pour toute $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$).
Si on pose $a = \sum_{(j,k) \in I} a_{jk}$, l'opérateur a est bien défini puisqu'en chaque point, la somme est finie.
De plus, pour toute $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, $\phi a_{jk} = 0$ pour tout $(j, k) \in I$ sauf un nombre fini. Donc ϕa est une somme finie de symboles d'ordre m, ce qui entraîne que ϕa est un symbole d'ordre m.
Donc $a \in S^m_{loc}(\Omega)$.
Il faut maintenant vérifier qu'avec cette définition, on a bien $\sum_{(j,k) \in I} A_{jk} = \mathrm{Op}_\Omega(a)$.
Pour toute $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et pour toute $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \phi \sum_{(j,k) \in I} A_{jk} u &= \sum_{\substack{(j,k) \in I \\ \mathrm{Supp}(\psi_j) \cap \mathrm{Supp}(\phi) \neq \emptyset}} \phi A_{jk} u \\ &= \sum_{\substack{(j,k) \in I \\ \mathrm{Supp}(\psi_j) \cap \mathrm{Supp}(\phi) \neq \emptyset}} \phi \, \mathrm{Op}(a_{jk}) u \\ &= \mathrm{Op}\left(\phi \sum_{\substack{(j,k) \in I \\ \mathrm{Supp}(\psi_j) \cap \mathrm{Supp}(\phi) \neq \emptyset}} a_{jk} \right) u \\ &= \mathrm{Op}(\phi a) u \\ &= \phi \, \mathrm{Op}_\Omega(a) u. \end{aligned}$$

Comme c'est vrai pour toute fonction ϕ, $\sum_{(j,k) \in I} A_{jk} u = \mathrm{Op}_\Omega(a) u$.
c) De même qu'à la question 3. de l'exercice 6., $M_{\psi_j} A M_{\psi_k} \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$ si $\mathrm{Supp}(\psi_j) \cap \mathrm{Supp}(\psi_k) = \emptyset$.
D'après la question 2. de l'exercice 6., c'est donc un opérateur à noyau $\mathcal{C}^\infty$.
Notons K le noyau et montrons qu'il est à support inclus dans $\mathrm{Supp}(\psi_j) \times \mathrm{Supp}(\psi_k)$.
Pour tout $x \notin \mathrm{Supp}(\psi_j)$, pour toute $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $A_{jk}u(x) = 0$ donc :

$$\int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) u(y) dy = 0.$$

C'est équivalent à $K(x,y) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$. Donc $\mathrm{Supp}(K) \subset \mathrm{Supp}(\psi_j) \times \mathbb{R}^n$.

Montrons maintenant que $K(x,y) = 0$ pour tous x, y tels que $y \notin \mathrm{Supp}(\psi_k)$.

Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas : $K(x,y) \neq 0$ pour un certain $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tel que $y \notin \mathrm{Supp}(\psi_k)$. Alors il existe une fonction u, de classe $\mathcal{C}^\infty$, à support inclus dans un voisinage arbitrairement petit de y, telle que :

$$\int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)u(y)dy \neq 0.$$

On a alors $A_{jk}u(x) \neq 0$. Mais, si le support de u est assez petit, $\mathrm{Supp}\, u \cap \mathrm{Supp}(\psi_k) = \emptyset$ et $A_{jk}u = M_{\psi_j}A(\psi_k u) = M_{\psi_j}A(0) = 0$. C'est absurde.

d) Pour tout $(j,k) \notin I$, notons K_{jk} le noyau de A_{jk}. Comme $\mathrm{Supp}(K_{jk}) \subset \mathrm{Supp}(\psi_j) \times \mathrm{Supp}(\psi_k)$, la somme $K = \sum_{(j,k)\notin I} K_{jk}$ est bien définie (chaque point admet un voisinage sur lequel seul un nombre fini de termes sont non-nuls) ; elle est $\mathcal{C}^\infty$.

On vérifie également que, pour toute fonction $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, $\left(\sum_{(j,k)\notin I} A_{jk}\right) u = \int_{\mathbb{R}^n} K(.,y)u(y)dy$. Cela implique que $\sum_{(j,k)\notin I} A_{jk}$ est un opérateur à noyau $\mathcal{C}^\infty$.

En posant $R = \sum_{(j,k)\notin I} A_{jk}$ et en définissant a comme à la question b), on a bien, d'après la question a) :

$$A = \sum_{(j,k)\in I} A_{jk} + \sum_{(j,k)\notin I} A_{jk} = \mathrm{Op}_\Omega(a) + R.$$