Corrigé TD n°4.

Exercice 1

1. On introduit une fonction $t \mapsto X(t)$ telle que, si f est solution de $\partial_t f + v \cdot \nabla f = 0$ alors $f(t, X(t))$ est une fonction constante. On définit $X(t) = x + vt$ avec $x \in \mathbb{R}^n$ quelconque. Alors,

$$\frac{d}{dt} f(t, x + vt) = (\partial_t f + v \cdot \nabla_x f)(t, x + vt).$$

Donc si f est solution du problème de Cauchy alors

$$f(t, X(t)) = f(t, x + vt) = f(0, X(0)) = f(0, x) = f_0(x)$$

d'où $f(t, x) = f_0(x - vt)$.
Réciproquement, on vérifie directement que $(t, x) \mapsto f_0(x - tv)$ est une fonction $\mathcal{C}^1$ qui est solution du problème de Cauchy.
2. Introduisons pour $t \geq 0$,

$$w(t) = A + B \int_0^t \phi(s)\, ds.$$

Par hypothèse, cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $w'(t) = B\phi(t) \leq Bw(t)$. Donc

$$\left(w(t)e^{-Bt}\right)' \leq 0, \quad \forall\, t \geq 0$$

et on en déduit le résultat voulu en intégrant cette inégalité.
3. Soient $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ et γ la solution maximale associée au problème de Cauchy considéré. On note $I \subset [0, T]$ l'intervalle de définition de γ qui est un voisinage de t. En utilisant l'hypothèse (**H2**), on a pour tout $s \in I$:

$$|\gamma(s)| \leq |x| + \left| \int_t^s |V(\tau, \gamma(\tau))|\, d\tau \right| \leq |x| + \kappa T + \kappa \left| \int_t^s |\gamma(\tau)|\, d\tau \right|.$$

D'après la question 2., on obtient pour tout $s \in I$:

$$|\gamma(s)| \leq (|x| + \kappa T)e^{\kappa|t-s|} \leq (|x| + \kappa T)e^{\kappa T}.$$

Supposons alors que $I \neq [0, T]$. Alors, d'après le lemme des bouts, on aurait explosion de γ à l'une (au moins) des extrémités de I i.e.

$$|\gamma(s)| \to +\infty, \quad \text{pour} \quad s \to \inf(I)^+ \quad \text{ou} \quad s \to \sup(I)^-.$$

Or ceci est exclu d'après l'estimation obtenue sur $\gamma(s)$ pour tout $s \in I$.
4. On résout l'équation et on obtient :

$$y(s) = \frac{x}{1 - (s - t)x}$$

qui est bien définie pour $s < t + 1/x$ si $x > 0$ et $s > t + 1/x$ si $x < 0$.

D'autre part, le flot caractéristique X de $\partial_t + x^2\ \partial_x$ vérifie

$$\partial_s X(s,t,x) = X(s,t,x)^2, \quad X(t,t,x) = x.$$

On a donc

$$X(s,t,x) = \frac{x}{1-(s-t)x}$$

et donc pour $t \in \mathbb{R}$, l'application $(s,x) \mapsto X(s,t,x)$ ne peut être définie sur aucun voisinage de (t,x) de la forme $[a,b] \times \mathbb{R}$ d'après ce qui précède.

5. Pour tous $t_1,\ t_2 \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, les applications

$$t_3 \mapsto X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) \quad \text{et} \quad t_3 \mapsto X(t_3, t_1, x)$$

sont deux courbes intégrales de V passant par $X(t_2, t_1, x)$ au temps t_2. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, l'unicité nous donne qu'elles coïncident sur tout leur intervalle maximal de définition c'est-à-dire pour tout $t_3 \in [0,T]$.

6. On utilise le théorème de dérivation des solutions d'équations différentielles par rapport à la donnée initiale qui nous dit que pout $t \in [0,T]$ fixé, l'application $(s,x) \mapsto X(s,t,x)$ admet une dérivée partielle $\partial_{x_j} X(s,t,x)$ pour tous $(s,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ et $j = 1, ..., n$. De plus, cette dérivée partielle est l'unique solution définie pour $s \in [0,T]$ de l'équation différentielle

$$\partial_s \partial_{x_j} X(s,t,x) = \nabla_x V(s, X(s,t,x)) \partial_{x_j} X(s,t,x), \quad \partial_{x_j} X(t,t,x) = e_j$$

où e_j est le j-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Et on a également que l'application $(s,x) \mapsto \partial_{x_j} X(s,t,x)$ est continue sur $[0,T] \times \mathbb{R}^n$.
En combinant ceci avec l'équation différentielle écrite ci-dessus, on en déduit que pour tout $j = 1, ..., n$, la dérivée partielle seconde $(s,x) \mapsto \partial_s \partial_{x_j} X(s,t,x)$ est continue sur $[0,T] \times \mathbb{R}^n$.
D'après l'hypothèse (**H1**), $V(s,\cdot)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. L'application $X(s,t,\cdot)$ l'est aussi (on a vu qu'elle admet des dérivées partielles $\partial_{x_j} X(s,t,\cdot)$ continues sur $\mathbb{R}^n$ pour tout $j = 1, ..., n$) donc dans l'équation

$$\partial_s X(s,t,x) = V(s, X(s,t,x)), \quad (s,x) \in \,]0,T[\times \mathbb{R}^n,$$

le membre de droite est de classe $\mathcal{C}^1$ en x et on obtient pour tout $j = 1, ..., n$ et tout $(s,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$:

$$\partial_{x_j} \partial_s X(s,t,x) = \nabla_x V(s, X(s,t,x)) \partial_{x_j} X(s,t,x) = \partial_s \partial_{x_j} X(s,t,x).$$

7. On a vu dans la question précédente que pour tout $(s,t) \in [0,T]^2$, l'application $X(s,t,\cdot)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. D'autre part, pour $(s,t) \in [0,T]^2$, d'après la question 5. appliquée avec $t_3 = t_1 = s$ et $t_2 = t$ puis avec $t_3 = t_1 = t$ et $t_2 = s$, on a les relations suivantes :

$$X(s,t,X(t,s,x)) = X(s,s,x) = x = X(t,t,x) = X(t,s,X(s,t,x)).$$

On en déduit que $X(s,t,\cdot)$ est une bijection de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$ d'inverse $X(s,t,\cdot)^{-1} = X(t,s,\cdot)$. La bijection $X(s,t,\cdot)$ et son inverse étant de classe $\mathcal{C}^1$, on peut conclure.

8. On a vu dans la question 6. que l'application $(s,t,x) \mapsto X(s,t,x)$ définie sur $[0,T] \times [0,T] \times \mathbb{R}^n$ admet des dérivées partielles continues par rapport à la variable x. On a également qu'elle est $\mathcal{C}^1$ par rapport à la variable s puisque par définition $\partial_s X(s,t,x) = V(s, X(s,t,x))$. Il reste à voir qu'elle admet aussi une dérivée partielle continue par rapport à t.

On fixe $(s,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ alors $X(s,t,x)$ est l'unique solution de

$$F(t,y(t)) = 0 \quad \text{où} \quad F(t,y) = X(t,s,y) - x.$$

L'application $F : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $t \in [0,T]$, la matrice $\nabla_y F(t,y) = \nabla_x X(t,s,y)$ est inversible. En effet, pour tout $(s,t) \in [0,T]^2$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$, le déterminant $J(t,s,x) = \det(\nabla_x X(t,s,x))$ est non nul car c'est le déterminant jacobien du difféomorphisme $X(s,t,\cdot)$. On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites qui nous dit en particulier que la fonction $t \mapsto y(t)$ est dérivable et vérifie

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} y(t) &= -\nabla_y F(t,y(t))^{-1} \partial_t F(t,y(t)) \\
&= -\nabla_x X(t,s,X(s,t,x))^{-1} V(t, X(t,s,X(s,t,x))) \\
&= -\nabla_x X(t,s,X(s,t,x))^{-1} V(t,x).
\end{aligned}$$

Cette dernière formule montre que l'application $\partial_t X$ est continue sur $[0,T] \times [0,T] \times \mathbb{R}^n$.
En conclusion, l'application X admet des dérivées partielles continues en tout point sur $[0,T] \times [0,T] \times \mathbb{R}^n$, elle y est donc de classe $\mathcal{C}^1$.
9. On utilise l'égalité prouvée à la question 5. et on la dérive par rapport à la variable t_2 (le flot X est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,T] \times [0,T] \times \mathbb{R}^n$) pour obtenir :

$$\partial_t X(t_3, t_2, X(t_2,t_1,x)) + \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} X(t_3,t_2,X(t_2,t_1,x))\, \partial_s X_j(t_2,t_1,x) = 0$$

i.e.

$$\partial_t X(t_3, t_2, X(t_2,t_1,x)) + \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} X(t_3,t_2,X(t_2,t_1,x))\, V_j(t_2, X(t_2,t_1,x)) = 0.$$

On conclut en posant $t_1 = t_2 = t$ et $t_3 = 0$.
10. Le fait que f soit $\mathcal{C}^1$ sur $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ provient du fait que f_0 est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et que l'application $(t,x) \mapsto X(0,t,x)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ d'après la question 7.
On a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(0,x) = f_0(X(0,0,x)) = f_0(x)$.
Enfin, on a pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$:

$$\partial_t f(t,x) = \nabla f_0(X(0,t,x)) \cdot \partial_t X(0,t,x)$$

et

$$\partial_{x_j} f(t,x) = \nabla f_0(X(0,t,x)) \cdot \partial_{x_j} X(0,t,x)$$

ce qui implique que

$$\partial_t f(t,x) + V(t,x) \cdot \nabla_x f(t,x) = \nabla f_0(X(0,t,x)) \cdot \left(\partial_t X(0,t,x) + \sum_{j=1}^{n} V_j(t,x)\, \partial_{x_j} X(0,t,x) \right) = 0$$

d'après la question précédente.

Exercice 2

1. Pour tout ξ, on a :

$$\begin{aligned}(1+|\xi|^2)^{s/2}|\hat u\star\hat v|(\xi) &\le \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^{s/2}|\hat u(\eta)|\,|\hat v(\xi-\eta)|d\eta\\ &\le 2^s\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\eta|^2)^{s/2}|\hat u(\eta)|\,|\hat v(\xi-\eta)|d\eta\\ &\quad + 2^s\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi-\eta|^2)^{s/2}|\hat u(\eta)|\,|\hat v(\xi-\eta)|d\eta\\ &= 2^s\left(U\star|\hat v|+|\hat u|\star v\right)\end{aligned}$$

où l'on note $U(\xi)=(1+|\xi|^2)^{s/2}|\hat u(\xi)|$ et $V(\xi)=(1+|\xi|^2)^{s/2}|\hat v(\xi)|$.
Donc :

$$\begin{aligned}\|uv\|_{H^s} &= \|(1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{uv}(\xi)\|_{L^2}\\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\|(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat u\star\hat v(\xi)\|_{L^2}\\ &\le \frac{2^s}{(2\pi)^n}\left(\|U\star|\hat v|\|_{L^2}+\||\hat u|\star V\|_{L^2}\right)\\ &\le \frac{2^s}{(2\pi)^n}\left(\|U\|_{L^2}\|\hat v\|_{L^1}+\|V\|_{L^2}\|\hat u\|_{L^1}\right)\\ &= \frac{2^s}{(2\pi)^n}\left(\|u\|_{H^s}\|\hat v\|_{L^1}+\|v\|_{H^s}\|\hat u\|_{L^1}\right)\\ &\le \frac{2^s}{(2\pi)^n}\big(\|u\|_{H^s}\|(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat v\|_{L^2}\|(1+|\xi|^2)^{-s/2}\|_{L^2}\\ &\qquad + \|v\|_{H^s}\|(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat u\|_{L^2}\|(1+|\xi|^2)^{-s/2}\|_{L^2}\big)\\ &= \frac{2^{s+1}\|(1+|\xi|^2)^{-s/2}\|_{L^2}}{(2\pi)^n}\|u\|_{H^s}\|v\|_{H^s}.\end{aligned}$$

2. On utilise le résultat rappelé combiné avec le résultat de la question 1. (en notant la constante D' plutôt que C) :

$$\begin{aligned}\forall\, t\le T,\qquad \|u_{n+1}(t)\|_{H^s} &\le D\|u_0\|_{H^s}+D\int_0^t\|u_n^2(\tau)\|_{H^s}d\tau\\ &\le D\|u_0\|_{H^s}+DD'\int_0^t\|u_n(\tau)\|_{H^s}^2d\tau.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\sup_{t\in[0;T]}\|u_{n+1}(t)\|_{H^s}\le D\|u_0\|_{H^s}+DD'T\left(\sup_{t\in[0;T]}\|u_n(t)\|_{H^s}\right)^2. \tag{1}$$

Dans les égalités précédentes, D est une constante, qu'on peut supposer plus grande que 1. Si $1-4D^2D'T\|u_0\|_{H^s}>0$, l'équation suivante a deux solutions sur $\mathbb{R}^+$:

$$x=D\|u_0\|_{H^s}+DD'Tx^2.$$

Notons x_0 la plus petite des solutions. Alors, par récurrence sur n, $\sup_{t\in[0;T]} \|u_n(t)\|_{H^s} \le x_0$. En effet, c'est vrai pour $n = 0$ car $\|u_0\|_{H^s} \le D\|u_0\|_{H^s} \le x_0$.
Ensuite, si c'est vrai pour n, c'est vrai pour $n + 1$: d'après l'équation (1),

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0;T]} \|u_{n+1}(t)\|_{H^s} &\le D\|u_0\|_{H^s} + DD'T \left(\sup_{t\in[0;T]} \|u_n(t)\|_{H^s}\right)^2 \\ &\le D\|u_0\|_{H^s} + DD'Tx_0^2 \\ &= x_0.\end{aligned}$$

On a donc démontré que, si $T < \frac{1}{4D^2D'\|u_0\|_{H^s}}$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{C}^0([0;T], H^s)$.
Montrons maintenant que, sous cette condition, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi de Cauchy dans $\mathcal{C}^0([0;T], H^s)$.
On utilise :

$$\partial_t(u_{n+1} - u_n) + \mathrm{Op}(a_t)(u_{n+1} - u_n) = u_n^2 - u_{n-1}^2 = (u_n - u_{n-1})(u_n + u_{n-1})$$
$$(u_{n+1} - u_n)(0) = 0$$

Toujours avec l'estimation d'énergie rappelée au début de l'exercice, on obtient :

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0;T]} \|u_{n+1}(t) - u_n(t)\| &\le DT \sup_{t\in[0;T]} \|(u_n - u_{n-1})(u_n + u_{n-1})(t)\|_{H^s} \\ &\le DD'T \left(\sup_{t\in[0;T]} \|u_n(t) - u_{n-1}(t)\|_{H^s}\right) \left(\sup_{t\in[0;T]} \|u_n(t) + u_{n-1}(t)\|_{H^s}\right) \\ &\le 2x_0DD'T \left(\sup_{t\in[0;T]} \|u_n(t) - u_{n-1}(t)\|_{H^s}\right).\end{aligned}$$

Or $x_0 < \frac{1}{2DD'T}$. Cela se vérifie à partir de l'équation qui définit x_0, en écrivant les solutions. Donc $2x_0DD'T < 1$ et la suite $\left(\sup_{t\in[0;T]} \|u_{n+1}(t) - u_n(t)\|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométriquement décroissante. Cela entraîne que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}^0([0;T], H^s)$.
Le fait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à la fois bornée et de Cauchy entraîne le même résultat pour u_n^2. On a alors que $\partial_t u_n = u_{n-1}^2 - \mathrm{Op}(a_t)u_n$ forme aussi une suite de Cauchy, dans $\mathcal{C}^0([0;T], H^{s-1})$.
Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}^0([0;T], H^s) \cap \mathcal{C}^1([0;T], H^{s-1})$.
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $u \in \mathcal{C}^0([0;T], H^s) \cap \mathcal{C}^1([0;T], H^{s-1})$.
On passe l'équation définissant u_{n+1} à la limite dans $\mathcal{C}^0([0;T], H^{s-1})$:

$$\partial_t u + \mathrm{Op}(a_t)u = u^2.$$

On a aussi $u(0) = u_0$ puisque $u_n(0) = u_0$ pour tout n.
Donc u est une solution au problème voulu.

Exercice 3

1. On commence par construire b_0. Pour cela, comme suggéré, on introduit F une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui coïncide avec une détermination de la racine carrée sur $\{z \in \mathbb{C} \text{ tq } \mathrm{Re}(z) \ge c\}$. On pose :

$$b_0(x,\xi) = (1 + |\xi|^2)^{m/4} F\left(a(x,\xi)(1 + |\xi|^2)^{-m/2}\right).$$

Il s'agit d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$. Pour tout (x,ξ) tel que $|\xi| \geq R$:

$$b_0(x,\xi)^2 = a(x,\xi).$$

On vérifie en calculant les dérivées que b_0 appartient à $S^{m/2}$.
D'après le théorème de calcul symbolique sur la composition, $\mathrm{Op}(b_0) \circ \mathrm{Op}(b_0) = \mathrm{Op}(b_0^2) + R$ avec $R \in \mathrm{Op}(S^{m-1})$. Comme $b_0^2 - a$ est à support compact en ξ, $\mathrm{Op}(a) - \mathrm{Op}(b_0^2) \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$ donc $\mathrm{Op}(a) - \mathrm{Op}(b_0) \circ \mathrm{Op}(b_0) \in S^{m-1}$.
On suppose maintenant que la suite a été construite jusqu'à b_k et on construit $b_{k+1} \in S^{m/2-(k+1)}$ tel que $\mathrm{Op}(a) - \mathrm{Op}(b_0 + ... + b_{k+1}) \circ \mathrm{Op}(b_0 + ... + b_{k+1}) \in \mathrm{Op}(S^{m-k-2})$.
On pose $b' = b_0 + ... + b_k$. Par hypothèse de récurrence, on a $\mathrm{Op}(a) - \mathrm{Op}(b') \circ \mathrm{Op}(b') = \mathrm{Op}(c)$, avec $c \in S^{m-k-1}$.
Il existe $c', R' > 0$ tels que, pour tous (x,ξ) :

$$|b'(x,\xi)| \geq c'(1+|\xi|^2)^{m/4} \qquad \text{si} \quad |\xi| \geq R'. \tag{2}$$

En effet, $\mathrm{Op}(a - b'^2) \in \mathrm{Op}(S^{m-1})$ donc $|b(x,\xi)|^2 \geq |a(x,\xi)| - C(1+|\xi|)^{m-1}$ pour une certaine constante C. L'équation (2) se déduit donc de la condition d'ellipticité imposée sur a.
On choisit $G : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $G(z) = 1/z$ si $|z| \geq c'$. On pose :

$$b_{k+1}(x,\xi) = \frac{c(x,\xi)}{2} G(b'(x,\xi)(1+|\xi|^2)^{-m/4})(1+|\xi|^2)^{-m/4}.$$

C'est un symbole de $S^{m/2-k-1}$.
D'après le théorème de calcul symbolique sur la composition :

$$\begin{aligned}\mathrm{Op}(a) - \mathrm{Op}(b' + b_{k+1}) \circ \mathrm{Op}(b' + b_{k+1}) &= \mathrm{Op}(a) - \mathrm{Op}(b') \circ \mathrm{Op}(b') - \mathrm{Op}(2b'b_{k+1}) + S \\ &= \mathrm{Op}(c - 2b'b_{k+1}) + S\end{aligned}$$

avec $S \in \mathrm{Op}(S^{m-k-2})$.
Le symbole $c - 2b'b_{k+1}$ est à support compact en ξ. Il appartient donc à $\mathrm{Op}(S^{-\infty})$. On a ainsi :

$$\mathrm{Op}(a) - \mathrm{Op}(b' + b_{k+1}) \circ \mathrm{Op}(b' + b_{k+1}) \in \mathrm{Op}(S^{m-k-2})$$

ce qui est ce qu'on voulait.
2. Il suffit maintenant de choisir b tel que $b \sim \sum_{j \in \mathbb{N}} b_j$ (on a vu dans l'exercice 4 du TD 2 qu'un tel b existait toujours).
En effet, pour tout K, $b - (b_0 + ... + b_K) \in \mathrm{Op}(S^{m/2-(K+1)})$ donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{Op}(b) \circ \mathrm{Op}(b) &= \mathrm{Op}(b_0 + ... + b_K) \circ \mathrm{Op}(b_0 + ... + b_K) + S_1 \\ &= \mathrm{Op}(a) + S_2 + S_1\end{aligned}$$

avec $S_1, S_2 \in \mathrm{Op}(S^{m-(K+1)})$.
Puisque c'est vrai pour tout K, $\mathrm{Op}(b) \circ \mathrm{Op}(b) - \mathrm{Op}(a) \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$.

Exercice 4

1. Soit $b \in S^{-m}$ tel que $\mathrm{Op}(b) \circ \mathrm{Op}(a) = \mathrm{Id} + R$ avec $R \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$ (on a vu qu'un tel b existait dans l'exercice 5 du TD 2).
Alors, pour toute u :

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H^s} &\leq \|(\mathrm{Id} + R)u\|_{H^s} + \|Ru\|_{H^s} \\
&= \|\mathrm{Op}(b) \circ \mathrm{Op}(a)u\|_{H^s} + \|Ru\|_{H^s} \\
&\leq \|\mathrm{Op}(b)\|_{H^{s-m} \to H^s} \|\mathrm{Op}(a)u\|_{H^{s-m}} + \|R\|_{H^t \to H^s} \|u\|_{H^t}.
\end{aligned}$$

On pose $K_0 = \|\mathrm{Op}(b)\|_{H^{s-m} \to H^s}$ et $K_1 = \|R\|_{H^t \to H^s}$ (ce qui est fini puisque $R \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$).
2. a) On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\,\langle \mathrm{Op}(a)u, u\rangle &= \frac{1}{2}\left(\langle \mathrm{Op}(a)u, u\rangle + \langle u, \mathrm{Op}(a)u\rangle\right) \\
&= \left\langle \frac{1}{2}\left(\mathrm{Op}(a) + \mathrm{Op}(a)^*\right) u, u \right\rangle.
\end{aligned}$$

D'après les théorèmes de calcul symbolique, on sait qu'on a $\mathrm{Op}(a)^* - \mathrm{Op}(\overline{a}) \in \mathrm{Op}(S^{m-1})$. Donc il existe $R \in \mathrm{Op}(S^{m-1})$ tel que :

$$\frac{1}{2}\left(\mathrm{Op}(a) + \mathrm{Op}(a)^*\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Op}(a) + \mathrm{Op}(\overline{a})\right) + R = \mathrm{Op}(\mathrm{Re}(a)) + R,$$

ce qui donne alors $\mathrm{Re}\,\langle \mathrm{Op}(a)u, u\rangle = \langle \mathrm{Op}(\mathrm{Re}(a))u, u\rangle + \langle Ru, u\rangle$.
b) T est un opérateur continu de $H^{(m-1)/2}$ vers $H^{-(m-1)/2}$. On a donc, pour toute $u \in H^{(m-1)/2}$:

$$|\langle Tu, u\rangle| \leq \|Tu\|_{H^{-(m-1)/2}} \|u\|_{H^{(m-1)/2}} \leq \|T\|_{H^{(m-1)/2} \to H^{-(m-1)/2}} \|u\|^2_{H^{(m-1)/2}}.$$

c) Soit $\chi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction positive à support compact qui vaut 1 sur $B(0, r)$. On pose $\tilde{a} = \mathrm{Re}\, a(x, \xi) + \lambda \chi(\xi)(1 + |\xi|^2)^{m/2}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}^+$, choisi suffisamment grand pour que :

$$\forall\, (x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \qquad \tilde{a}(x, \xi) \geq c(1 + |\xi|)^m. \tag{3}$$

Alors $b = \sqrt{\tilde{a}}$ est un symbole de $S^{m/2}$.
D'après les théorèmes de calcul symbolique, on sait qu'on a $\mathrm{Op}(b)^* \circ \mathrm{Op}(b) = \mathrm{Op}(|b|^2) + S$ avec $S \in \mathrm{Op}(S^{m-1})$. Comme $|b|^2 - \mathrm{Re}\, a$ est un symbole à support compact en ξ, $|b|^2 - \mathrm{Re}\, a \in S^{-\infty}$, ce qui entraîne :

$$\mathrm{Op}(b)^* \circ \mathrm{Op}(b) = \mathrm{Op}(\mathrm{Re}\, a) + S' \qquad \text{avec } S' \in \mathrm{Op}(S^{m-1}).$$

De plus, d'après l'équation (3), le symbole b vérifie la condition de la question 1. (pour m remplacé par $m/2$). Il existe donc des constantes $K, K' > 0$ telles que :

$$\forall\, u \in H^{m/2}, \qquad \|\mathrm{Op}(b)u\|_{L^2} \geq K\|u\|_{H^{m/2}} - K'\|u\|_{H^{(m-1)/2}}.$$

ce qui implique, pour des constantes K_1 et K_1' bien choisies :

$$\forall\, u \in H^{m/2}, \qquad \|\mathrm{Op}(b)u\|^2_{L^2} \geq K_1\|u\|^2_{H^{m/2}} - K_1'\|u\|^2_{H^{(m-1)/2}}.$$

Alors, pour toute $u \in H^{m/2}$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\langle \operatorname{Op}(a)u, u\rangle &= \langle \operatorname{Op}(\operatorname{Re} a)u, u\rangle + \langle Ru, u\rangle \\
&= \langle \operatorname{Op}(b)^* \circ \operatorname{Op}(b)u, u\rangle + \big\langle (R - S')u, u\big\rangle \\
&= \|\operatorname{Op}(b)u\|_2^2 + \big\langle (R - S')u, u\big\rangle \\
&\geq \|\operatorname{Op}(b)u\|_2^2 - C\|u\|^2_{H^{(m-1)/2}} \\
&\geq K_1\|u\|^2_{H^{m/2}} - (C + K_1')\|u\|^2_{H^{(m-1)/2}}.
\end{aligned}$$

3. Si $s \geq (m-1)/2$ c'est une conséquence directe de la question 2.c) puisque $\|u\|_{H^s} \geq \|u\|_{H^{(m-1)/2}}$ pour toute u.
Supposons maintenant $s < (m-1)/2$. On pose $t = \frac{m}{4}\left(1 - \frac{1}{m-2s}\right)$, $r = \frac{m-2s-1}{m-2s}$, $p = 2\frac{m-2s}{m-2s-1}$ et $q = 2(m-2s)$.
On a $1/p + 1/q = 1/2$ donc, pour toute $u \in H^{m/2}$, par Hölder :

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H^{(m-1)/2}} &= \|(1+|\xi|^2)^{(m-1)/4}\hat{u}(\xi)\|_2 \\
&= \|(1+|\xi|^2)^t|\hat{u}(\xi)|^r(1+|\xi|^2)^{(m-1)/4-t}|\hat{u}(\xi)|^{1-r}\|_2 \\
&\leq \|(1+|\xi|^2)^t|\hat{u}(\xi)|^r\|_p\|(1+|\xi|^2)^{(m-1)/4-t}|\hat{u}(\xi)|^{1-r}\|_q \\
&= \|(1+|\xi|^2)^{m/2}|\hat{u}(\xi)|^2\|_1^{1/p}\|(1+|\xi|^2)^s|\hat{u}(\xi)|^2\|_1^{1/q} \\
&= \|u\|^{2/p}_{H^{m/2}}\|u\|^{2/q}_{H^s},
\end{aligned}$$

ce qui entraîne, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\|u\|^2_{H^{(m-1)/2}} \leq \|u\|^{4/p}_{H^{m/2}}\|u\|^{4/q}_{H^s} \leq \frac{2\varepsilon^p}{p}\|u\|^2_{H^{m/2}} + \varepsilon^{-q}\frac{2}{q}\|u\|^2_{H^s}.$$

L'inégalité de la question 2.c) donne alors :

$$\forall\, u \in H^{m/2}, \qquad \operatorname{Re}\langle \operatorname{Op}(a)u, u\rangle \geq \left(C_0 - \frac{2}{p}C_1\varepsilon^p\right)\|u\|^2_{H^{m/2}} - C_1\varepsilon^{-q}\frac{2}{q}\|u\|^2_{H^s}$$

ce qui est bien de la forme voulue si ε est assez petit.

Exercice 5

On suppose pour l'instant λ fixé.
On pose, pour toutes $u, v \in H_0^k(\Omega)$:

$$B(u,v) = \big\langle L_1'u, L_1^*v\big\rangle + \ldots + \big\langle L_s'u, L_s^*v\big\rangle + \lambda\langle u, v\rangle.$$

C'est une forme bilinéaire. Elle est continue sur $H_0^k(\Omega)$ car, pour tout $t \leq s$, L_t' et L_t^* sont continues de $H_0^k(\Omega)$ vers $L^2(\Omega)$.
De plus, pour toute $u \in H_0^k(\Omega)$, si on note $\tilde{u}$ la fonction qui coïncide avec u sur Ω et qui vaut 0 en-dehors de Ω, on a $\tilde{u} \in H^k(\mathbb{R}^n)$ (on rappelle que ce ne serait pas vrai pour n'importe quelle $u \in H^k(\Omega)$ mais qu'ici, on suppose que u appartient à l'adhérence dans $H^k(\Omega)$ de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, ce qui rend cette affirmation vraie).

En utilisant la question 3. de l'exercice 4 :

$$\begin{aligned}
B(u,u) &= B(\tilde{u},\tilde{u}) \\
&= \left\langle L_1'\tilde{u}, L_1^*\tilde{u}\right\rangle + ... + \left\langle L_s'\tilde{u}, L_s^*\tilde{u}\right\rangle + \lambda\left\langle \tilde{u},\tilde{u}\right\rangle \\
&= \left\langle (L_1\circ L_1' + ... + L_s\circ L_s')\tilde{u},\tilde{u}\right\rangle + \lambda\|\tilde{u}\|_2^2 \\
&= \langle L\tilde{u},\tilde{u}\rangle + \lambda\|\tilde{u}\|_2^2 \\
&\geq A_0\|\tilde{u}\|_{H^k}^2 - B_0\|\tilde{u}\|_2^2 + \lambda\|\tilde{u}\|_2^2 \\
&\geq A_0\|u\|_{H^k}^2 - B_0\|u\|_2^2 + \lambda\|u\|_2^2
\end{aligned}$$

Si λ est plus grand que B_0, les hypothèses du théorème du théorème de Lax-Milgram sont donc vérifiées (pour $H = H_0^k(\Omega)$). Le théorème garantit alors l'existence de $u \in H_0^k(\Omega)$ telle que $B(u,.) = f$, ce qui est équivalent à l'existence d'une solution faible du problème de Dirichlet.

Exercice 6

1. a) On a : $\|T_j\| = \sqrt{\|T_j^*T_j\|} \leq \omega(0)$.
b) On a :

$$\begin{aligned}
\|T_{i_1}^*...T_{i_{2N}}\| &= \sqrt{\|T_{i_1}^*...T_{i_{2N}}(T_{i_1}^*...T_{i_{2N}})^*\|} \\
&= \sqrt{\|T_{i_1}^*T_{i_2}...T_{i_{2N}}T_{i_{2N}}^*...T_{i_1}\|} \\
&\leq \sqrt{\|T_{i_1}^*T_{i_2}\|\,\|T_{i_3}^*T_{i_4}\|...\|T_{i_{2N-1}}^*T_{i_{2N}}\|\|T_{i_{2N}}^*\|\,\|T_{i_{2N-1}}T_{i_{2N-2}}^*\|...\|T_{i_3}T_{i_2}^*\|\,\|T_{i_1}\|} \\
&\leq \omega(i_1-i_2)\omega(i_2-i_3)...\omega(i_{2N-1}-i_{2N})\sqrt{\|T_{i_{2N}}^*\|\,\|T_{i_1}\|} \\
&\leq \omega(0)\omega(i_1-i_2)\omega(i_2-i_3)...\omega(i_{2N-1}-i_{2N}).
\end{aligned}$$

c) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
\|(U^*U)^N\| &= \left\|\sum_{i_1,...,i_{2N}\in F} T_{i_1}^*...T_{i_{2N}}\right\| \\
&\leq \sum_{i_1,...,i_{2N}\in F} \omega(0)\omega(i_1-i_2)...\omega(i_{2N-1}-i_{2N}) \\
&\leq \omega(0)\sum_{i_1\in F,k_2,...,k_{2N}\in\mathbb{Z}} \omega(k_2)\omega(k_3)...\omega(k_{2N}) \\
&= \omega(0)\sum_{i_1\in F}\sigma^{2N-1} \\
&\leq \mathrm{Card}(F)\sigma^{2N}.
\end{aligned}$$

Au moins lorsque N est une puissance de 2, on a, en utilisant l'égalité $\|A^*A\| = \|A\|^2$:

$$\begin{aligned}
&\|U\|^{2N} = \|(U^*U)^N\| \leq \mathrm{Card}(F)\sigma^{2N} \\
\Rightarrow \quad &\|U\| \leq (\mathrm{Card}(F))^{1/(2N)}\sigma
\end{aligned}$$

En passant à la limite $N \to +\infty$, on obtient le résultat demandé.

2. a) On suppose que c'est vrai en dimension $n = 1$ et on montre que c'est vrai pour tout n. On procède par récurrence sur n.

Pour $n = 1$, c'est vrai par hypothèse. Supposons maintenant que c'est vrai pour $n \geq 1$ et montrons-le pour $n + 1$.

Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ constituée de fonctions de la classe de Schwartz (on admet qu'une telle base existe). Puisque $(u_{k_1}(x_1)...u_{k_{n+1}}(x_{n+1}))_{k_1,...,k_{n+1}\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^{n+1})$, il suffit de montrer que, pour tous $k_1, ..., k_{n+1}, k'_1, ..., k'_{n+1}$:

$$|\left\langle \mathrm{Op}(a)(u_{k_1}....u_{k_{n+1}}), u_{k'_1}...u_{k'_{n+1}} \right\rangle| \leq M$$

pour une constante M majorée par une combinaison linéaire des normes de certaines dérivées partielles de a.

$$\begin{aligned}
&\left\langle \mathrm{Op}(a)(u_{k_1}....u_{k_{n+1}}), u_{k'_1}...u_{k'_{n+1}} \right\rangle \\
=&\frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int a(x_1, ..., x_{n+1}, \xi_1, ..., \xi_{n+1}) e^{ix.\xi} \hat{u}_{k_1}(\xi_1)...\hat{u}_{k_{n+1}}(\xi_{n+1}) \\
&\qquad\qquad \times \overline{u_{k'_1}(x_1)}...\overline{u_{k'_{n+1}}(x_{n+1})} dx_1...dx_{n+1} d\xi_1...d\xi_{n+1} \\
=&\left\langle \mathrm{Op}(b)(u_{k_{n+1}}), u_{k'_{n+1}} \right\rangle
\end{aligned}$$

si on note :

$$\forall\, (x, \xi) \in \mathbb{R}^2, \quad b(x, \xi) = \left\langle \mathrm{Op}(a(..., x, ..., \xi))(u_{k_1}...u_{k_n}), u_{k'_1}...u_{k'_n} \right\rangle.$$

Puisque $\mathrm{Op}(a(..., x, ..., \xi))$ est un opérateur pseudo-différentiel en dimension n, il est continu de $L^2(\mathbb{R}^n)$ vers $L^2(\mathbb{R}^n)$, par hypothèse de récurrence. De plus, sa norme est contrôlée par la norme de certaines dérivées de a. Donc b est une fonction bornée, dont le suprémum est majoré par une combinaison linéaire des normes de certaines dérivées de a.

En dérivant sous le signe somme, on voit que $b \in S^0_{0,0}$ et que, pour la même raison que précédemment, toutes ses dérivées sont majorées par des combinaisons linéaires des normes de certaines dérivées de a.

On peut donc appliquer à b le résultat pour $n = 1$:

$$\forall\, k_1, ..., k_{n+1}, k'_1, ..., k'_{n+1}, \qquad \left|\left\langle \mathrm{Op}(a)(u_{k_1}....u_{k_{n+1}}), u_{k'_1}...u_{k'_{n+1}} \right\rangle\right| \leq \|\,\mathrm{Op}(b)\|_{L^2\to L^2}$$

ce qui conclut.

b) On a : $(1 + \partial_x)\phi(x) = xe^{-x}\mathbb{1}_{x\geq 0}$ et $(1 + \partial_x)^2\phi(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{x\geq 0}$.

La dérivée de $e^{-x}\mathbb{1}_{x\geq 0}$ vaut (cela se vérifie par intégration par parties, en utilisant la définition de la dérivée au sens des distributions) $\delta_0 - e^{-x}\mathbb{1}_{x\geq 0}$, ce qui entraîne le résultat.

c) $a = a \star \delta_{(0,0)} = a \star ((1 + \partial_x)^3(1 + \partial_\xi)^3 [\phi(x)\phi(\xi)]) = ((1 + \partial_x)^3(1 + \partial_\xi)^3 a) \star (\phi(x)\phi(\xi))$

d) L'application A_{st} envoie une fonction de L^2 vers une autre fonction de L^2. En effet, pour toute $f \in L^2$:

$$A_{st}(f)(x) = 2\pi\phi(x - s)\mathcal{F}^{-1}(\phi(. - t)\hat{f})(x).$$

La multiplication par $\phi(. - s)$ est continue de L^2 vers L^2 (car ϕ est bornée), $\mathcal{F}^{-1}$, la multiplication par $\phi(. - t)$ et $\mathcal{F}$ aussi. Donc A_{st} est une composition d'opérateurs continus de L^2 vers L^2.

Les multiplications par $\phi(.-s')$ ou $\phi(.-t')$ sont leurs propres adjointes. L'adjoint de $\mathcal{F}$ est $2\pi\mathcal{F}^{-1}$ et celui de $\mathcal{F}^{-1}$ est $(2\pi)^{-1}\mathcal{F}$. Donc :

$$A^*_{s't'}(f) = 2\pi\mathcal{F}^{-1}(\phi(.-t')\mathcal{F}(\phi(.-s')f)).$$

En composant avec A_{st} :

$$\begin{aligned}
A_{st}A^*_{s't'}(f)(x) &= 2\pi\int e^{ix\xi}\phi(x-s)\phi(\xi-t)\left[\phi(\xi-t')\mathcal{F}(\phi(.-s')f)(\xi)\right]d\xi \\
&= 2\pi\int e^{i(x-y)\xi}\phi(x-s)\phi(\xi-t)\phi(\xi-t')\phi(y-s')f(y)dyd\xi \\
&= \int K(x,y)f(y)dy
\end{aligned}$$

si on pose $K(x,y) = 2\pi\phi(x-s)\phi(y-s')\int e^{i(x-y)\xi}\phi(\xi-t)\phi(\xi-t')d\xi$.
e) On a :

$$\begin{aligned}
K(x,y) &= 2\pi\phi(x-s)\phi(y-s')\int e^{i(x-y)\xi}\phi(\xi-t)\phi(\xi-t')d\xi \\
&= 2\pi\phi(x-s)\phi(y-s')e^{i(x-y)(t+t')/2}\int e^{i(x-y)\xi}\phi(\xi-(t-t')/2)\phi(\xi+(t-t')/2)d\xi \\
&= \frac{\pi}{2}\phi(x-s)\phi(y-s')e^{i(x-y)(t+t')/2}\int_{|t-t'|/2}^{+\infty} e^{i(x-y)\xi}\left(\xi^2-\left(\frac{t-t'}{2}\right)^2\right)^2 e^{-2\xi}d\xi.
\end{aligned}$$

Or on vérifie que :

$$(2+\partial_\xi)^3\left[\left(\xi^2-\left(\frac{t-t'}{2}\right)^2\right)^2 e^{-2\xi}\mathbb{1}_{\xi\geq|t-t'|/2}\right] = 24\xi e^{-2\xi}\mathbb{1}_{\xi\geq|t-t'|/2} + 2(t-t')^2e^{-|t-t'|}\delta_{|t-t'|/2}(\xi).$$

La fonction $\xi\mapsto\xi e^{-2\xi}\mathbb{1}_{\xi\geq|t-t'|/2}$ est dans L^1, avec une norme majorée par $A|t-t'|e^{-|t-t'|}$ pour une certaine constante A. Sa transformée de Fourier est donc dans L^∞, avec une norme L^∞ majorée par $A|t-t'|e^{-|t-t'|}$.
La transformée de Fourier en $x-y$ de $\xi\mapsto 2(t-t')^2e^{-|t-t'|}\delta_{|t-t'|/2}(\xi)$ est :

$$2(t-t')^2e^{-|t-t'|}e^{-i(x-y)|t-t'|/2}.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
&|2-i(x-y)|^3\left|\int_{|t-t'|/2}^{+\infty} e^{i(x-y)\xi}\left(\xi^2-\left(\frac{t-t'}{2}\right)^2\right)^2 e^{-2\xi}d\xi\right| \\
&= \left|\int_{|t-t'|/2}^{+\infty} e^{i(x-y)\xi}(2+\partial_\xi)^3\left[\left(\xi^2-\left(\frac{t-t'}{2}\right)^2\right)^2 e^{-2\xi}\right]d\xi\right| \\
&\leq A|t-t'|e^{-|t-t'|} + 2(t-t')^2e^{-|t-t'|} \\
&\leq Me^{-|t-t'|/2}.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
|K(x,y)| &\leq \frac{\pi}{2}\phi(x-s)\phi(y-s')\left|\int_{|t-t'|/2}^{+\infty} e^{i(x-y)\xi}\left(\xi^2-\left(\frac{t-t'}{2}\right)^2\right)^2 e^{-2\xi}d\xi\right| \\
&\leq M'\phi(x-s)\phi(y-s)\frac{1}{|2-i(x-y)|^3}e^{-|t-t'|/2} \\
&\leq M''\phi(x-s)\phi(y-s)(1+|x-y|)^{-3}e^{-|t-t'|/2}.
\end{aligned}$$

f) On a :

$$\begin{aligned}
\int |K(x,y)|^2dxdy &\leq C^2e^{-|t-t'|}\int(1+|x-y|)^{-6}|\phi(x-s)|^2|\phi(y-s')|^2dxdy \\
&= \frac{C^2e^{-|t-t'|}}{4}\int_{(\mathbb{R}^+)^2}(1+|(x-y)+(s-s')|)^{-6}x^2y^2e^{-(x+y)}dxdy \\
&\leq Me^{-|t-t'|}\int_{(\mathbb{R}^+)^2}(1+|(x-y)+(s-s')|)^{-6}e^{-(x+y)/2}dxdy \\
&= Me^{-|t-t'|}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{|z|}^{+\infty}e^{-z'/2}dz'\right)(1+|z+(s-s')|)^{-6}dz \\
&= M'e^{-|t-t'|}\int_{\mathbb{R}}(1+|z+(s-s')|)^{-6}e^{-|z|/2}dz \\
&= M'e^{-|t-t'|}\left(\int_{|z|\leq|s-s'|/2}(1+|z+(s-s')|)^{-6}e^{-|z|/2}dz\right. \\
&\qquad\left.+\int_{|z|\geq|s-s'|/2}(1+|z+(s-s')|)^{-6}e^{-|z|/2}dz\right) \\
&\leq M''e^{-|t-t'|}\left((1+|s-s'|)^{-6}\int_{|z|\leq|s-s'|/2}e^{-|z|/2}dz\right. \\
&\qquad\left.+\int_{|z|\geq|s-s'|/2}e^{-|z|/2}dz\right) \\
&\leq M'''e^{-|t-t'|}((1+|s-s'|)^{-6}+e^{-|s-s'|/4}) \\
&\leq M''''e^{-|t-t'|}(1+|s-s'|)^{-6}.
\end{aligned}$$

On applique une racine carrée et l'indication donne le résultat.
g) Pour toute f :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Op}(a)(f)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int a(x,\xi)e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int g(s,t)\phi(x-s)\phi(\xi-t)e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)d\xi dsdt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int g(s,t)A_{st}(f)(x)dsdt.
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Op}(a) = \frac{1}{2\pi}\int g(s,t)A_{st}dsdt$.
La fonction g est bornée, puisque a appartient à $S^0_{0,0}$, et sa norme infinie est majorée par une combinaison linéaire des normes de certaines dérivées de a. Le théorème admis donne donc le résultat si on peut l'appliquer.
Posons $h((s,t),(s',t')) = c^{1/2}(1+|s-s'|)^{-3/2}e^{-|t-t'|/4}$. Il suffit de montrer que l'opérateur ayant h pour noyau est borné de $L^2(\mathbb{R}^2)$ vers $L^2(\mathbb{R}^2)$. C'est une conséquence du lemme de Schur (vu dans le TD 3), puisque :

$$\begin{aligned}
\forall\,(s,t), \qquad & \int |h((s,t),(s',t'))|ds'dt' = c^{1/2}\int(1+|S|)^{-3/2}e^{-|T|/4}dSdT < +\infty,\\
\forall\,(s',t'), \qquad & \int |h((s,t),(s',t'))|dsdt = c^{1/2}\int(1+|S|)^{-3/2}e^{-|T|/4}dSdT < +\infty.
\end{aligned}$$