Corrigé TD n°5.

Exercice 1

1. a) Quitte à appliquer une homothétie, on peut supposer $|\xi| = 1$.
Soit $c \in]0;1[$ tel que $B(\xi, 3c) \subset C_1$. Posons $C_2 = \mathbb{R}_+^* B(\xi, c)$. C'est un voisinage conique de ξ. Montrons qu'il satisfait la condition requise.
Soit $\eta \in C_2$. Alors η est de la forme $\eta = \lambda\xi'$, avec $\lambda > 0$ et $\xi' \in B(\xi, c)$. Pour tout ζ, on a :

$$\begin{aligned}
& |\eta - \zeta| \leq c|\eta| \\
\Rightarrow \quad & |\xi' - \zeta/\lambda| \leq c|\xi'| \leq c(|\xi| + c) \leq 2c \\
\Rightarrow \quad & |\zeta/\lambda - \xi| \leq |\zeta/\lambda - \xi'| + |\xi' - \xi| < 3c \\
\Rightarrow \quad & \zeta/\lambda \in B(\xi, 3c) \subset C_1 \\
\Rightarrow \quad & \zeta/\lambda \in C_1 \\
\Rightarrow \quad & \zeta \in C_1.
\end{aligned}$$

b) On utilise l'égalité $\widehat{\phi u} = \frac{1}{(2\pi)^n}\hat{\phi} \star \hat{u}$.
Il faut montrer que $\hat{\phi} \star \hat{u}$ est à décroissance rapide sur C_2. On étudie $\hat{\phi} \star \hat{u}(\eta)$ pour $\eta \in C_2$:

$$\begin{aligned}
\hat{\phi} \star \hat{u}(\eta) &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(\eta - \zeta)\hat{u}(\zeta)d\zeta \\
&= \int_{|\eta-\zeta|\leq c|\eta|} \hat{\phi}(\eta - \zeta)\hat{u}(\zeta)d\zeta + \int_{|\eta-\zeta|>c|\eta|} \hat{\phi}(\eta - \zeta)\hat{u}(\zeta)d\zeta.
\end{aligned}$$

On va montrer que chacun des deux termes de la somme est à décroissance rapide.
Soit $N \in \mathbb{N}$ quelconque.
Il existe une constante C_N telle que, pour tout $\zeta \in C_1$:

$$|\hat{u}(\zeta)| \leq C_N|\zeta|^{-N}.$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\left| \int_{|\eta-\zeta|\leq c|\eta|} \hat{\phi}(\eta - \zeta)\hat{u}(\zeta)d\zeta \right| &\leq C_N \int_{|\eta-\zeta|\leq c|\eta|} |\hat{\phi}(\eta - \zeta)||\zeta|^{-N}d\zeta \\
&\leq C_N \int_{|\eta-\zeta|\leq c|\eta|} |\hat{\phi}(\eta - \zeta)|((1-c)|\eta|)^{-N}d\zeta \\
&\leq C_N(1-c)^{-N}|\eta|^{-N}\|\hat{\phi}\|_1
\end{aligned}$$

donc le premier terme est bien à décroissance rapide.
D'après le rappel, $\hat{u}$ est à croissance polynomiale, il existe donc $M \in \mathbb{N}$ tel que $\zeta \mapsto (1 + |\zeta|)^{-M}\hat{u}(\zeta)$ est intégrable. On suppose un tel M fixé.
Puisque ϕ appartient à la classe de Schwartz, $\hat{\phi}$ aussi donc il existe $D_{N+M} > 0$ tel que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$:

$$|\phi(\xi)| \leq D_{N+M}(1 + |\xi|)^{-(N+M)}.$$

Alors, en supposant $c < 1$:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{|\eta-\zeta|>c|\eta|} \hat{\phi}(\eta-\zeta)\hat{u}(\zeta)d\zeta\right| &\leq \int_{|\eta-\zeta|>c|\eta|} D_{N+M}(1+|\eta-\zeta|)^{-(N+M)}|\hat{u}(\zeta)|d\zeta \\
&\leq \int_{|\eta-\zeta|>c|\eta|} D_{N+M}(1+|\eta-\zeta|)^{-N}(1+|\eta-\zeta|)^{-M}|\hat{u}(\zeta)|d\zeta \\
&\leq \int_{|\eta-\zeta|>c|\eta|} D_{N+M}c^{-N}(1+|\eta|)^{-N}\left(\frac{c}{c+1}\right)^{-M}(1+|\zeta|)^{-M}|\hat{u}(\zeta)|d\zeta \\
&= C'_N(1+|\eta|)^{-N}\|(1+|\zeta|)^{-M}|\hat{u}(\zeta)|\|_1.
\end{aligned}$$

On a utilisé le fait que, si $|\eta-\zeta| > c|\eta|$, alors :

$$|\eta-\zeta| \geq |\zeta| - |\eta| \geq |\zeta| - \frac{1}{c}|\eta-\zeta| \qquad \Rightarrow \qquad |\eta-\zeta| \geq \frac{c}{c+1}|\zeta|$$

et on a noté $C'_N = D_{N+M}c^{-(N+M)}(c+1)^M$. Donc le deuxième terme est également à décroissance rapide.
c) Si $\xi \notin \Sigma(u)$, alors $\hat{u}$ est à décroissance rapide sur un voisinage conique de ξ donc, d'après la question b), $\widehat{\phi u}$ est également à décroissance rapide sur un voisinage conique de ξ. Donc $\xi \notin \Sigma(\phi u)$.
2. a) Soit $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Soit $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Soit $(x,\xi) \notin WF(v)$. Montrons qu'alors $(x,\xi) \notin WF(\phi v)$.
Par définition du front d'onde, il existe $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, non-nulle en x, telle que $\widehat{\chi v}$ est à décroissance rapide sur un voisinage conique de ξ.
Soit ψ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, qui vaut 1 sur un voisinage du support de χ. Alors $\chi(\phi v) = (\phi\psi)(\chi v)$. Puisque χv est une distribution à support compact et $\phi\psi$ appartient à la classe de Schwartz, la question précédente montre que $\mathcal{F}(\phi\psi\chi v)$ est à décroissance rapide sur un voisinage conique de ξ, c'est-à-dire que $\mathcal{F}(\chi(\phi v))$ est à décroissance rapide sur un voisinage conique de ξ. Donc $(x,\xi) \notin WF(\phi v)$.
b) Puisque ϕ_2 ne s'annule pas sur le support de ϕ_1, ϕ_1/ϕ_2 est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, donc appartient à la classe de Schwartz.
Puisque $\phi_2 u$ est une distribution à support compact, la question 1.c) implique :

$$\Sigma(\phi_1 u) = \Sigma\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\phi_2 u\right) \subset \Sigma(\phi_2 u).$$

c) Si $(x,\xi) \in WF(u)$ alors il n'existe pas $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty$ telle que $\phi(x) \neq 0$ et $\widehat{\phi u}$ est à décroissance rapide dans un voisinage conique de ξ. Cela revient à dire que, pour toute $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty$ telle que $\phi(x) \neq 0$, $\xi \in \Sigma(\phi u)$. Donc $\xi \in \Sigma_x(u)$.
Réciproquement, si $(x,\xi) \notin WF(u)$, alors il existe $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty$ telle que $\phi(x) \neq 0$ (on peut alors supposer $\phi(x) = 1$) et $\xi \notin \Sigma(\phi u)$. Dans ce cas, ξ n'appartient pas à l'intersection des $\Sigma(\phi u)$ donc $\xi \notin \Sigma_x(u)$.
d) Quitte à remplacer Γ par son intérieur, on peut supposer que Γ est ouvert.
Notons $B = \{\xi \in \mathbb{R}^n \text{ tq } |\xi| = 1\} \cap (\mathbb{R}^n - \Gamma)$. Il s'agit d'un compact de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $\xi \in B$, puisque $\xi \notin \Sigma_x(u)$, il existe $\phi_\xi \in \mathcal{C}_c^\infty$ telle que $\phi_\xi(x) = 1$ et $\xi \notin \Sigma(\phi_\xi u)$. Comme $\Sigma(\phi_\xi u)$ est un fermé, cela entraîne qu'il existe un voisinage ouvert de ξ dans B, qu'on note V_ξ, tel que $V_\xi \cap \Sigma(\phi_\xi u) = \emptyset$.
Soient $\xi_1, ..., \xi_s$ tels que $B \subset V_{\xi_1} \cup ... \cup V_{\xi_s}$. Alors, pour tout $\xi \in B$, il existe j tel que $\xi \in V_{\xi_j}$ et, pour ce j, $\xi \notin \Sigma(\phi_{\xi_j} u)$.

Donc

$$\{\xi \in \mathbb{R}^n \text{ tq } |\xi| = 1\} \cap (\mathbb{R}^n - \Gamma) \subset \cup_j (\mathbb{R}^n - \Sigma(\phi_{\xi_j} u)),$$

c'est-à-dire

$$\{\xi \in \mathbb{R}^n \text{ tq } |\xi| = 1\} \cap (\cap_j \Sigma(\phi_j u)) \subset \Gamma.$$

Puisque les ensembles considérés sont des cônes, $\cap_j \Sigma(\phi_j u) \subset \Gamma$.
e) Soit $U = \{x' \in \mathbb{R}^n \text{ tq } \forall\, j, \phi_j(x') \neq 0\}$. C'est un voisinage ouvert de x.
Si $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(U, \mathbb{R})$, alors, pour tout j, $\Sigma(\phi u) \subset \Sigma(\phi_j u)$, d'après la question 3.a). En effet, ϕ_j ne s'annule pas sur U donc ne s'annule pas sur le support de ϕ. Donc $\Sigma(\phi u) \subset \Gamma$.

Exercice 2

1. Supposons (2) vérifiée.
Soient $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \mathbb{R}^n$ tels que Γ_1 est un voisinage de x_0, Γ_2 est un voisinage conique de ξ_0 et $\Gamma_1 \times \Gamma_2 \subset \Gamma$. Soit $\phi \in \mathcal{C}^\infty$ à support dans Γ_1. Soit $\psi \in \mathcal{C}^\infty$ une fonction bornée ayant toutes ses dérivées bornées, à support dans Γ_2, telle que :

$$\forall\, \xi \in \Gamma_2' \text{ tq } |\xi| \geq 1, \qquad \psi(\xi) = 1$$

où Γ_2' est un voisinage conique de ξ_0 inclus dans Γ_2.

Lemme 2.1. $\mathrm{Op}(\psi(\xi))\,\mathrm{Op}(\phi(x))f \in H^\infty$.

Démonstration. D'après l'un des théorèmes de calcul symbolique, pour tout N :

$$\mathrm{Op}(\psi(\xi))\,\mathrm{Op}(\phi(x)) - \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{1}{i^{|\alpha|}\alpha!}\,\mathrm{Op}(\partial^\alpha \psi(\xi) \partial^\alpha \phi(x)) \in \mathrm{Op}(S^{-(N+1)})$$

Pour tout α, $\mathrm{Op}(\partial^\alpha \psi(\xi) \partial^\alpha \phi(x))f \in H^\infty$, puisque (2) est vérifiée. Donc $\mathrm{Op}(\psi(\xi))\,\mathrm{Op}(\phi(x))f$ est la somme d'un élément de H^∞ et d'un élément de $H^{s+(N+1)}$. Comme ceci est valable pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Op}(\psi(\xi))\,\mathrm{Op}(\phi(x))f \in H^\infty$. ☐

La transformée de Fourier de $\mathrm{Op}(\psi(\xi))\,\mathrm{Op}(\phi(x))f$ est $\psi\left(\widehat{\phi f}\right)$. La fonction $\mathrm{Op}(\psi(\xi))\,\mathrm{Op}(\phi(x))f$ appartient à H^∞, donc est dans L^1 et a toutes ses dérivées dans L^1 (en effet, l'injection $H^1 \to L^1$ est continue). Cela implique que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\xi^\alpha \psi(\xi)\left(\widehat{\phi f}\right)(\xi)$ est une fonction bornée.

Donc $\xi^\alpha \left(\widehat{\phi f}\right)(\xi)$ est bornée sur Γ_2' pour tout multi-indice α. Cela implique que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe C_N tel que :

$$\forall\, \xi \in \Gamma_2, \qquad |\widehat{\phi f}(\xi)| \leq C_N (1 + |\xi|)^{-N},$$

donc $(x_0, \xi_0) \notin WF(f)$.

2. a) Soient $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\phi(x_0) = 2$ et Γ_2 un voisinage conique de ξ_0 tels que :

$$\forall\, N \in \mathbb{N}, \exists\, C_N > 0 \text{ tq } \forall\, \xi \in \Gamma_2, \qquad |\widehat{\phi f}(\xi)| \leq C_N (1 + |\xi|)^{-N}.$$

Soient Γ_2' un voisinage conique ouvert de ξ_0 inclus dans Γ_2 et ψ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ ayant toutes ses dérivées $\mathcal{C}^\infty$ telle que :

- le support de ψ est inclus dans Γ_2 ;
- ψ vaut 1 sur $\Gamma_2' - B(0, 1)$.

Alors $\mathrm{Op}(\psi(\xi))\,\mathrm{Op}(\phi(x))f \in H^\infty$; en effet, la transformée de Fourier de cette fonction vaut $\psi(\xi)\left(\widehat{\phi f}\right)(\xi)$ et décroît plus vite que tout polynôme.
Notons $a \in S^0$ le symbole de $\mathrm{Op}(\psi(\xi))\,\mathrm{Op}(\phi(x))$. D'après l'un des théorèmes de calcul symbolique :

$$a \sim \sum_{|\alpha|\leq n} \frac{1}{i^{|\alpha|}\alpha!}\partial^\alpha\psi(\xi)\partial^\alpha\phi(x).$$

Pour tout $\alpha \neq 0$, $\partial^\alpha\psi(\xi) = 0$ si $\xi \in \Gamma_2' - B(0,1)$, puisque ψ est constante sur $\Gamma_2' - B(0,1)$. On voit (en reprenant l'exercice 4 du TD 2) qu'il existe $\tilde{a} \in S^0$ tel que :

$$\tilde{a} \sim \sum_{|\alpha|\leq n} \frac{1}{i^{|\alpha|}\alpha!}\partial^\alpha\psi(\xi)\partial^\alpha\phi(x)$$

et tel que, de plus, $\tilde{a}(x,\xi) = \psi(\xi)\phi(x) = \phi(x)$ si $\xi \in \Gamma_2' - B(0,1)$.
Puisque $\phi(x_0) = 2$, il existe un voisinage Γ_1 de x_0 sur lequel $\phi \geq 1$. Alors :

$$\forall\,(x,\xi) \in \Gamma_1 \times \Gamma_2' \text{ tq } |\xi| > 1, \qquad |a(x,\xi)| = |\phi(x)| \geq 1.$$

Comme $a - \tilde{a} \in S^{-\infty}$ et $\mathrm{Op}(a)f \in H^\infty$, on a aussi $\mathrm{Op}(\tilde{a})f \in H^\infty$. Donc $\tilde{a}$ satisfait les conditions voulues.
b) Soit $m \in \mathbb{R}$ quelconque. Soit $b \in S^m$ tel que $\mathrm{Supp}(b) \subset \Gamma'$.

Lemme 2.2. *Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $c_N \in S^{-(m-N)}$ à support dans Γ' tel que :*

$$\mathrm{Op}(b) - \mathrm{Op}(c_0 + ... + c_N)\,\mathrm{Op}(a) \in \mathrm{Op}(S^{m-N-1}).$$

Démonstration. On procède par récurrence sur N.
Pour $N = 0$, on prend $c_0 = \chi b/a$, où χ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact qui vaut 0 sur $B(0,R)$ et 1 sur $\mathbb{R}^n - B(0,2R)$. D'après la propriété d'ellipticité vérifiée par a, c'est un symbole de S^m. Il est de plus à support dans Γ'. D'après le théorème de calcul symbolique sur la composition, $\mathrm{Op}(c_0)\,\mathrm{Op}(a) - \mathrm{Op}(c_0 a) \in \mathrm{Op}(S^{m-1})$. Comme $\mathrm{Op}(c_0 a) - \mathrm{Op}(b)$ a son symbole qui est à support compact en ξ, $\mathrm{Op}(c_0 a) - \mathrm{Op}(b) \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$. Donc $\mathrm{Op}(c_0)\,\mathrm{Op}(a) - \mathrm{Op}(b) \in \mathrm{Op}(S^{m-1})$.
Supposons la propriété vraie pour N et démontrons-la pour $N+1$. Posons $C_N = c_0 + ... + c_N$.
Posons $d = \sum_{|\alpha|\leq N+1} \frac{1}{i^{|\alpha|}\alpha!}\partial_\xi^\alpha C_N(x,\xi)\partial_x^\alpha a(x,\xi)$. C'est un symbole de S^m et, d'après l'un des théorèmes de calcul symbolique :

$$\mathrm{Op}(C_N)\,\mathrm{Op}(a) - \mathrm{Op}(d) \in \mathrm{Op}(S^{m-(N+2)}).$$

Posons $c_{N+1} = \chi(b-d)/a$, avec χ définie de la même façon que dans le cas $N = 0$. Puisque $\mathrm{Op}(b) - \mathrm{Op}(C_N)\,\mathrm{Op}(a) \in \mathrm{Op}(S^{m-(N+1)})$, on a aussi $\mathrm{Op}(b-d) \in \mathrm{Op}(S^{m-(N+1)})$ donc $c_{N+1} \in S^{m-(N+1)}$.
Le symbole c_{N+1} est à support dans Γ', puisque b et d sont à support dans Γ' (pour d, c'est une conséquence de l'hypothèse de récurrence : C_N est à support dans Γ'). Alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{Op}(b) - \mathrm{Op}(C_N + c_{N+1})\,\mathrm{Op}(a) &= \mathrm{Op}(b) - \mathrm{Op}(d) - \mathrm{Op}(c_{N+1})\,\mathrm{Op}(a) \\ &\quad - (\mathrm{Op}(C_N)\,\mathrm{Op}(a) - \mathrm{Op}(d)) \\ &= \mathrm{Op}(b-d) - \mathrm{Op}(c_{N+1}a) - (\mathrm{Op}(c_{N+1})\,\mathrm{Op}(a) - \mathrm{Op}(c_{N+1}a)) \\ &\quad - (\mathrm{Op}(C_N)\,\mathrm{Op}(a) - \mathrm{Op}(d)).\end{aligned}$$

On a $\mathrm{Op}(b-d) - \mathrm{Op}(c_{N+1}a) \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$, $\mathrm{Op}(c_{N+1})\,\mathrm{Op}(a) - \mathrm{Op}(c_{N+1}a), \mathrm{Op}(C_N)\,\mathrm{Op}(a) - \mathrm{Op}(d) \in \mathrm{Op}(S^{m-(N+2)})$ donc $\mathrm{Op}(b) - \mathrm{Op}(C_N + c_{N+1})\,\mathrm{Op}(a) \in \mathrm{Op}(S^{m-(N+2)})$.
Donc l'hypothèse de récurrence est vérifiée. □

Si on choisit $c \sim \sum_{N\geq 0} c_N$, on a $\mathrm{Op}(b) - \mathrm{Op}(c)\,\mathrm{Op}(a) \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$.
c) Pour tout $b \in S^{+\infty}$ tel que $\mathrm{Supp}(b) \subset \Gamma'$, il existe, d'après la question précédente, $c \in S^{+\infty}$ tel que $\mathrm{Op}(b) - \mathrm{Op}(c)\,\mathrm{Op}(a) \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$. Alors $\mathrm{Op}(b)f - \mathrm{Op}(c)\,\mathrm{Op}(a)f \in H^\infty$. Puisque $\mathrm{Op}(a)f \in H^\infty$ (d'après la question a), $\mathrm{Op}(c)\,\mathrm{Op}(a)f \in H^\infty$. Donc $\mathrm{Op}(b)f \in H^\infty$.
Ainsi, la propriété (2) est vraie pour le cône Γ'.

Exercice 3

1. On utilise le fait que $\widehat{\Delta u}(t,\xi) = -|\xi|^2\hat{u}(t,\xi)$:

$$\begin{cases} \partial_t^2\hat{u}(t,\xi) + |\xi|^2\hat{u}(t,\xi) & = 0 \\ (\hat{u}, \partial_t\hat{u})_{|t=0} & = (0, \hat{f}) \end{cases}$$

On a alors $\hat{u}(t,\xi) = a(\xi)e^{it|\xi|} + b(\xi)e^{-it|\xi|}$, pour deux fonctions a et b ne dépendant pas de t.
Les conditions initiales impliquent $a + b = 0$ et $i|\xi|(a-b) = \hat{f}$, donc $a = \frac{1}{2i|\xi|}\hat{f}$ et $b = -a$ pour $\xi \neq 0$, ce qui donne :

$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{f}(\xi)\frac{e^{it|\xi|} - e^{-it|\xi|}}{2i|\xi|} = \hat{f}(\xi)\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}.$$

Cette expression est également valable pour $\xi = 0$ si on prolonge la fonction $x \mapsto \sin(x)/x$ par 1 en 0.
Si f est $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact, alors $\hat{f}$ est à décroissance rapide donc, d'après l'expression qu'on vient de trouver, $\hat{u}(t,.)$ aussi, pour tout t, ce qui implique que $u(t,.)$ est $\mathcal{C}^\infty$.
2. On a :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2\pi)^n}\frac{1}{2i}(u_+ - u_-) + \frac{1}{(2\pi)^n}\int(1-\chi(\xi))\frac{\sin(t\xi)}{|\xi|}e^{ix.\xi}\hat{f}(\xi)d\xi \\
=&\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\chi}{2i|\xi|}(e^{it|\xi|} - e^{-it|\xi|})\hat{f} + (1-\chi)\frac{e^{it|\xi|} - e^{-it|\xi|}}{2i|\xi|}\hat{f}\right) \\
=&\mathcal{F}^{-1}\left(\hat{f}(\xi)\frac{e^{it|\xi|} - e^{-it|\xi|}}{2i|\xi|}\right),
\end{aligned}$$

ce qui est l'expression qu'on vient de trouver pour u.
3. Le membre de droite de la décomposition est la transformée de Fourier inverse d'une fonction continue à support compact (puisque $1-\chi$ est à support compact). C'est donc une fonction $\mathcal{C}^\infty$.
Donc $WF(u(t)) \subset WF((u_+ - u_-)(t)) \subset WF(u_+(t)) \cup WF(u_-(t))$.
4. Il suffit de montrer que u_+^2 est $\mathcal{C}^\infty$.
La fonction $\hat{f}$ est à décroissance rapide sur le cône $\{\xi \text{ tq } 1 - \psi(\xi) \neq 0\}$. Comme $\frac{(1-\psi(\xi))\chi(\xi)}{|\xi|}e^{it|\xi|}$ est bornée sur $\mathbb{R}^n$, u_+^2 est la transformée de Fourier inverse d'une fonction à décroissance rapide. C'est donc une fonction $\mathcal{C}^\infty$.
5. La relation se vérifie en calculant les dérivées partielles.

Formellement, en notant $\delta(\xi) = \frac{\psi(\xi)\chi(\xi)}{|\xi|}$:

$$\begin{aligned}
u_+^1(t,x) &= \int \delta(\xi) e^{i(x.\xi + t|\xi|)} \hat{f}(\xi) d\xi \\
&= \int \delta(\xi) e^{ix.\xi + t|\xi|} \left(\int f(y) e^{-iy.\xi} dy \right) d\xi \\
&= \int f(y)\delta(\xi) e^{i((x-y).\xi + t|\xi|)} d\xi dy \\
&= \sum_j \int_{y \in \mathrm{Supp} f, \xi \in \mathbb{R}^n} f(y)\delta(\xi) \left(\frac{x_j - y_j + t\frac{\xi_j}{|\xi|}}{i|x - y + t\frac{\xi}{|\xi|}|^2} \right) \partial_j e^{i((x-y).\xi + t|\xi|)} d\xi dy \\
&= -\sum_j \int_{y \in \mathrm{Supp} f, \xi \in \mathbb{R}^n} f(y)(\partial_j \delta_j)(\xi) e^{i((x-y).\xi + t|\xi|)} d\xi dy
\end{aligned}$$

où on a noté $\delta_j(\xi) = \delta(\xi) \left(\frac{x_j - y_j + t\frac{\xi_j}{|\xi|}}{i|x-y+t\frac{\xi}{|\xi|}|^2} \right)$.

La fonction δ_j est bien définie pour $x \in U$ car, d'après les hypothèses de l'énoncé, $x - y + t\frac{\xi}{|\xi|}$ ne s'annule pas si $y \in \mathrm{Supp}(f)$ et $\chi(\xi) \neq 0$.

Pour x et y fixés, δ_j est une fonction homogène de degré -1 en ξ, en-dehors d'un voisinage de 0. Donc $\partial_j \delta_j$ est homogène de degré -2 en ξ en-dehors d'un voisinage de 0.

En réitérant le processus, on voit qu'on peut écrire, pour tout $K \geq 1$:

$$u_+^1(t,x) = \sum_{j \leq N_K} \int_{y \in \mathrm{Supp} f, \xi \in \mathbb{R}^n} f(y) \alpha_j^K(x,y,\xi) e^{i((x-y).\xi + t|\xi|)} d\xi dy$$

où les α_j^K sont des fonctions homogènes de degré $-K$ en ξ, en-dehors d'un voisinage de 0. Lorsque K est assez grand, toutes les intégrales de la somme sont convergentes. De plus, pour tout s, α_j^K est s fois dérivable en x si K est assez grand et on peut vérifier que le théorème de convergence dominée s'applique. Donc u_+^1 est s fois dérivable en x.

Puisque c'est vrai pour tout s, u_+^1 est $\mathcal{C}^\infty$.

Pour justifier rigoureusement les égalités formelles entre intégrales qui ne convergent pas, on commence par supposer que f appartient à la classe de Schwarz ; le résultat sera ensuite étendu à toutes les fonctions L^2 par densité. Ensuite, on régularise l'intégrale au moyen de la fonction $\xi \mapsto e^{-\varepsilon|\xi|^2}$ puis on fait tendre ε vers 0 comme dans la démonstration de la formule d'inversion de Fourier.

6. La question précédente montre que, si $x_0 \notin \mathrm{Supp}(f) - t\Sigma_1(f)$, alors $x_0 \notin \mathrm{singsupp}(u_+(t))$. De la même manière, on montre que, si $x_0 \notin \mathrm{Supp}(f) + t\Sigma_1(f)$, alors $x_0 \notin \mathrm{singsupp}(u_-(t))$. Donc, si $x_0 \notin \mathrm{Supp}(f) \pm t\Sigma_1(f)$, x_0 n'appartient ni au support singulier de $u_+(t)$ ni au support singulier de $u_-(t)$ et donc, d'après la question 3., x_0 n'appartient pas au support singulier de $u(t)$ (remarquons que le support singulier est la projection sur la première coordonnée du front d'onde).

Utilisons ce résultat pour montrer le théorème demandé.

Soit x_0 tel qu'il n'existe pas $(x,\xi) \in WF(f)$ tel que $x_0 = x \pm t\frac{\xi}{|\xi|}$.

Pour tout $x' \in \mathrm{Supp}(f)$, soit $C_{x'}$ un voisinage conique fermé de $\Sigma_{x'}(f)$ tel que, pour tout $\xi \in C_{x'}$:

$$x_0 \neq x' \pm t\frac{\xi}{|\xi|}. \tag{1}$$

D'après la question 2.e) de l'exercice 1, il existe $U_{x'}$ un voisinage de x' tel que, pour toute $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support inclus dans $U_{x'}$, $\Sigma(\phi f) \subset C_{x'}$. Quitte à rétrécir $U_{x'}$, on peut de plus renforcer (1) en :

$$\forall\, x'' \in U_{x'}, \forall\, \xi \in C_{x'}, \qquad x_0 \neq x'' \pm t\frac{\xi}{|\xi|}.$$

Pour toute $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support inclus dans $U_{x'}$, on aura alors :

$$x_0 \notin \mathrm{Supp}(f\phi) \pm t\Sigma_1(f\phi). \tag{2}$$

Comme $\mathrm{Supp}(f)$ est compact, on peut choisir $U_{x'_1}, ..., U_{x'_s}$ un recouvrement de $\mathrm{Supp}(f)$ par de tels ouverts.
Soit $(\phi_1, ..., \phi_s)$ une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement. On a alors $f = (f\phi_1)+...+(f\phi_s)$ et $u = u_1 + ... + u_s$ où, pour tout $s' \leq s$, $u_{s'}$ est la solution de l'équation des ondes lorsqu'on a remplacé f par $f\phi_{s'}$.
Pour tout s', d'après la propriété (2) et la remarque faite au début de la question, $x_0 \notin \mathrm{singsupp}(u_{s'})$.
Puisque, pour tout s', $x_0 \notin \mathrm{singsupp}(u_{s'})$, $x_0 \notin \mathrm{singsupp}(u)$.