Corrigé TD n°6.

Exercice 1

1. La démonstration s'obtient facilement à partir de la décomposition en séries de Fourier. La principale difficulté consiste à ne pas se tromper dans le calcul des constantes. Pour cela, il est important d'introduire un produit scalaire sur l'espace des fonctions $L^2(]0,T[)$ et une suite de fonctions orthonormées pour ce produit scalaire. Par exemple, considérons le produit scalaire usuel : $(f,g) = \int_0^T f(t)\overline{g(t)}\,dt$. On pose alors $e_k(t) = T^{-1/2}\exp(2ik\pi t/T)$. Ces fonctions sont T-périodiques et on a $(e_k, e_l) = \delta_k^l$. Introduisons les coefficients de Fourier

$$\hat{u}_k = (u, e_k) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T u(t) \exp\Big(-\frac{2i\pi kt}{T}\Big)\,dt.$$

En intégrant par parties, on vérifie que les coefficients de Fourier de u' vérifient

$$\widehat{(u')}_k = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T u'(t) \exp\Big(-\frac{2i\pi kt}{T}\Big)\,dt = \frac{2i\pi}{T} k\hat{u}_k.$$

On en déduit grâce à la formule de Plancherel appliquée à u et à u' que

$$\int_0^T |u(t)|^2\,dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{u}_k|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} |\hat{u}_k|^2 \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} |k|^2|\hat{u}_k|^2 = \Big(\frac{T}{2\pi}\Big)^2 \int_0^T |u'(t)|^2\,dt,$$

où l'on a utilisé que $\hat{u}_0 = T^{-1/2}\int_0^T u(t)\,dt = 0$.

2. Si $\gamma = 1$, on obtient ce résultat facilement à partir de la décomposition de la solution en séries de Fourier et de l'identité de Plancherel. Pour $\gamma \neq 1$ on procède de la façon suivante. Notons d'abord que, par périodicité en x,

$$\frac{d}{dt}\int_{-\pi}^{\pi} u(t,x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \partial_x(\gamma(x)\partial_x u)\,dx = 0.$$

On en déduit que $\int_{-\pi}^{\pi} u(t,x)\,dx = 0$ pour tout temps $t \geq 0$ puisque cette propriété est vraie initialement par hypothèse. Ceci va nous permettre d'utiliser l'inégalité de Poincaré-Wirtinger. Ensuite on multiplie l'équation par u et on intègre sur $[-\pi,\pi]$ pour obtenir

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\pi}^{\pi} u(t,x)^2\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} \gamma(x)(\partial_x u(t,x))^2\,dx = 0.$$

Comme γ est minorée par une constante strictement positive, l'inégalité de Poincaré-Wirtinger assure que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\pi}^{\pi} u(t,x)^2\,dx \leq -C_1 \int_{-\pi}^{\pi} (\partial_x u(t,x))^2\,dx,$$

pour une certaine constante $C_1 > 0$. Puis en utilisant l'inégalité de Poincaré-Wirtinger, on obtient l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\pi}^{\pi} u(t,x)^2\,dx \leq \frac{C}{2}\int_{-\pi}^{\pi} u(t,x)^2\,dx.$$

L'inégalité voulue provient du lemme de Gronwall.

Exercice 2

1. Si $u \in C_c^\infty(\Omega)$, on peut étendre u par 0 en une fonction définie sur la bande $\mathcal{R}$, que l'on note encore u. Comme u s'annule au bord de cette bande, on peut écrire

$$u(x', x_n) = \int_{-R}^{x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t)\, dt.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que

$$|u(x', x_n)|^2 \leq \left(\int_{-R}^{x_n} 1\, dt \right) \int_{-R}^{x_n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t) \right|^2 dt.$$

On en déduit trivialement que

$$|u(x', x_n)|^2 \leq \left(\int_{-R}^{R} 1\, dt \right) \int_{-R}^{R} \left| \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t) \right|^2 dt.$$

Puis, en intégrant sur $\mathcal{R}$, on obtient

$$\iint_{\mathcal{R}} |u(x', x_n)|^2\, dx' dx_n \leq (2R)^2 \iint_{\mathcal{R}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t) \right|^2 dx' dt,$$

d'où l'inégalité voulue.

2. a) C'est clairement une application bilinéaire. La forme quadratique associée à B (appelée l'énergie de u) est donnée par

$$E(u) = B(u, u) = \int_\Omega \left(|\nabla u(x)|^2 + V(x)\, u^2(x) \right) dx$$

et est une quantité positive ou nulle car $V \geq 0$ par hypothèse. De plus, en utilisant l'inégalité de Poincaré, on a pour $u \in H_0^1(\Omega)$:

$$\frac{1}{1 + \|V\|_{L^\infty}} E(u) \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq (1 + C_P^2) \|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq (1 + C_P^2) E(u)$$

où $C_P > 0$ est la constante provenant de l'inégalité de Poincaré. On en déduit que $B(u, u) = 0$ implique que $u = 0$ dans $H_0^1(\Omega)$ et $u \mapsto E(u)^{1/2}$ définit une norme équivalente à la norme $\| \cdot \|_{H^1(\Omega)}$.

b) D'après la question a), B est une forme bilinéaire continue et coercive. D'autre part, on définit la forme linéaire L sur $H_0^1(\Omega)$ par

$$\forall\, v \in H_0^1(\Omega), \quad L(v) = \int_\Omega F(x)\, v(x)\, dx.$$

On vérifie grâce à Cauchy-Schwarz que L est bien définie et continue sur $H_0^1(\Omega)$:

$$\forall\, v \in H_0^1(\Omega), \quad |L(v)| \leq \|F\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|F\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

On applique le théorème de Lax-Milgram qui nous dit qu'il existe un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $B(u, v) = L(v)$ pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$. En particulier, cette relation est vraie pour tout $v \in \mathcal{C}_c^1(\Omega)$ et $u \in H_0^1(\Omega)$ est donc l'unique solution faible du problème de Dirichlet homogène.

Exercice 3

Supposons par l'absurde que ce résultat est faux. Alors on peut trouver une suite (u_n) d'éléments de $H^1(\Omega)$ tels que

$$\int_\Omega u_n(x)\,dx = 0, \quad \int_\Omega |u_n(x)|^2\,dx = 1, \qquad \int_\Omega |\nabla u_n(x)|^2\,dx \le \frac{1}{n}.$$

Comme (u_n) est bornée dans $H^1(\Omega)$, puisque l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte, on peut extraire une sous-suite (u_{n_k}) qui converge fortement dans $L^2(\Omega)$ vers une fonction u. Comme ∇u_{n_k} converge fortement vers 0 dans L^2, on en déduit que (u_{n_k}) est en fait une suite de Cauchy dans $H^1(\Omega)$, qui converge dans $H^1(\Omega)$. On en déduit que u vérifie :

$$\int_\Omega u(x)\,dx = 0, \quad \int_\Omega |u(x)|^2\,dx = 1, \qquad \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx = 0.$$

Donc u est une fonction non nulle, constante et nulle en moyenne. D'où la contradiction.

Exercice 4

1. Par densité, il suffit de prouver l'inégalité pour $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$. On écrit la formule de Taylor avec reste intégral pour f entre x et $y \in \Omega$:

$$f(x) - f(y) = \int_0^1 \nabla f(z_t)\cdot(x-y)\,dt \quad \text{où} \quad z_t = (1-t)\,x + t\,y.$$

On multiplie cette identité par $\nu(y)$ et on intègre par rapport à $y \in \Omega$ l'égalité obtenue, ce qui donne :

$$f(x) - \langle f\rangle_\nu = \int_\Omega \int_0^1 \nabla f(z_t)\cdot(x-y)\,dt\,\nu(y)\,dy.$$

En utilisant ensuite l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (f(x) - \langle f\rangle_\nu)^2\,\nu(x)\,dx &\le \int_\Omega\int_\Omega\int_0^1 |\nabla f(z_t)|^2\,|x-y|^2\,dt\,\nu(y)\,\nu(x)dydx \\
&\le C_1 \int_\Omega\int_\Omega\int_0^{1/2} |\nabla f(z_t)|^2\,dtdx\,\nu(y)dy + C_1 \int_\Omega\int_\Omega\int_{1/2}^1 |\nabla f(z_t)|^2\,dtdy\,\nu(x)dx \\
&= C_1 \int_\Omega\int_0^{1/2}\int_{\Omega(t,y)} |\nabla f(z)|^2\,\frac{dz}{1-t}\,dt\,\nu(y)dy + C_1 \int_\Omega\int_{1/2}^1\int_{\Omega'(t,x)} |\nabla f(z)|^2\,\frac{dz}{t}\,dt\,\nu(x)dx \\
&\le 2\,C_1 \int_\Omega |\nabla f(z)|^2\,dz,
\end{aligned}$$

où on a noté

$$\begin{cases} C_1 = \|\nu\|_{L^\infty}\,\mathrm{diam}(\Omega)^2, \\ \Omega(t,y) = \{z \in \mathbb{R}^n,\ (z-ty)/(1-t) \in \Omega\}, \\ \Omega'(t,x) = \{z \in \mathbb{R}^n,\ (z-(1-t)x)/t \in \Omega\}. \end{cases}$$

On en déduit alors l'inégalité de Poincaré-Wirtinger avec la constante $\kappa = 1/(2\,C_1\,\|1/\nu\|_{L^\infty})$.

De plus, on a
$$\int_\Omega f^2\,\nu = \int_\Omega (f-\langle f\rangle_\nu + \langle f\rangle_\nu)^2\,\nu = \int_\Omega |f-\langle f\rangle_\nu|^2\nu + \langle f\rangle_\nu^2$$
d'où la deuxième inégalité.

2. On cherche W sous la forme $W(x) = e^{\gamma\langle x\rangle}$. On calcule ensuite :
$$\nabla W(x) = \gamma\,\frac{x}{\langle x\rangle}\,e^{\gamma\langle x\rangle} \quad \text{et} \quad \Delta W(x) = \left(\gamma^2 + \gamma\,\frac{d-1}{\langle x\rangle} + \frac{\gamma}{\langle x\rangle^3} - \frac{\gamma}{\langle x\rangle} - \frac{\gamma^2}{\langle x\rangle^2}\right) e^{\gamma\langle x\rangle},$$
puis finalement
$$\begin{aligned} L^*W = \Delta W - x\cdot\nabla W &= \left(\gamma^2 + \gamma\,\frac{d-1}{\langle x\rangle} + \frac{\gamma}{\langle x\rangle^3} - \frac{\gamma}{\langle x\rangle} - \frac{\gamma^2}{\langle x\rangle^2} - \gamma\,\frac{|x|^2}{\langle x\rangle}\right) W \\ &\le -\theta W + b\,\mathbb{1}_{B_R} \end{aligned}$$
avec le choix de $\theta=\gamma=1$ puis R et b assez grands. En effet, pour $\theta=\gamma=1$, on a
$$L^*W \le \psi\,W, \quad \text{avec} \quad \psi(x) \xrightarrow[|x|\to\infty]{} -\infty.$$
Donc il existe $R>0$ tel que si $|x|\ge R$, alors $\psi(x)\le -1$. D'autre part, par continuité de ψ et W, on peut définir $b = \max_{|x|\le R}((\psi+1)\,W)$. Ainsi, on a
$$\psi(x)\,W(x) \le -W(x) = -W(x) + b\,\mathbb{1}_{B(0,R)}(x), \quad \text{si } |x|\ge R$$
et
$$\psi(x)\,W(x) = (\psi(x)+1)W(x) - W(x) \le -W(x) + b = -W(x) + b\,\mathbb{1}_{B(0,R)}(x), \quad \text{si } |x|<R.$$

3. Il suffit de calculer $\partial_{x_j}G(x) = -x_j\,G(x)$ pour $j=1,...,n$ puis $\partial_{x_jx_j}G(x) = -G(x) + x_j^2\,G(x)$.

4. a) On réécrit l'inégalité de la question 2. de la manière suivante :
$$1 \le -\frac{L^*W(x)}{\theta\,W(x)} + \frac{b}{\theta\,W(x)}\,\mathbb{1}_{B(0,R)}(x), \qquad \forall\, x\in\mathbb{R}^n.$$
Il suffit de prouver l'inégalité pour $g\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ par densité. On considère donc $g\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et on a :
$$\int_{\mathbb{R}^n} g^2\,G \;\le\; -\int_{\mathbb{R}^n} g^2\,\frac{L^*W}{\theta\,W}\;G + \frac{b}{\theta}\int_{B(0,R)} g^2\,\frac{1}{W}\,G = T_1 + T_2.$$
D'une part, comme $\nabla G + xG = 0$, on a :
$$\begin{aligned} \theta\,T_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \nabla W\cdot\left\{\nabla\left(\frac{g^2}{W}\right)G + \frac{g^2}{W}\,\nabla G\right\} + \int_{\mathbb{R}^n}\frac{g^2}{W}\,x\cdot\nabla W\,G \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \nabla W\cdot\nabla\left(\frac{g^2}{W}\right)G \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} 2\,\frac{g}{W}\;\nabla W\cdot\nabla g\,G - \int_{\mathbb{R}^n}\frac{g^2}{W^2}\;|\nabla W|^2\,G \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla g|^2\,G - \int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{g}{W}\,\nabla W - \nabla g\right|^2 G \\ &\le \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla g|^2\,G. \end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité de Poincaré-Wirtinger avec $\Omega = B(0,R)$ prouvée à la question 1., on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\theta}{b}\,T_2 &= \int_{B(0,R)} g^2\,\frac{1}{W}\,G \\
&\le \left(\int_{B(0,R)} G\right)\int_{B(0,R)} g^2\,\nu_R \\
&\le \left(\int_{B(0,R)} G\right)\left(\langle g\rangle_{\nu_R}^2 + C\int_{B(0,R)} |\nabla g|^2\;\nu_R\right)
\end{aligned}$$

où C est une constante strictement positive.
En regroupant les deux estimations précédentes, on a montré que pour une certaine constante $C > 0$, on a :

(1)
$$\int_{\mathbb{R}^n} g^2\,G \le C\Big(\langle g\rangle_{\nu_R}^2 + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla g|^2\;G\Big).$$

b) On considère maintenant h telle que $\int_{\mathbb{R}^n} h^2 G < \infty$ et $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla h|^2 G < \infty$. On sait que pour tout $c \in \mathbb{R}$, on a

(2)
$$\int_{\mathbb{R}^n} (h - \langle h\rangle_G)^2 G \le \phi(c) = \int_{\mathbb{R}^n} (h-c)^2\,G$$

car ϕ est une fonction polynomiale qui atteint son minimum en $\langle h\rangle_G$. On définit $g = h - \langle h\rangle_{\nu_R}$, de sorte que $\langle g\rangle_{\nu_R} = 0$, $\nabla g = \nabla h$. En utilisant tout d'abord (2) puis (1), on aboutit à

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (h - \langle h\rangle_G)^2\,G &\le \int_{\mathbb{R}^n} g^2\,G \\
&\le C\Big(\langle g\rangle_{\nu_R}^2 + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla g|^2\;G\Big) \\
&= C\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla h|^2\;G,
\end{aligned}$$

pour une constante $C > 0$, ce qui termine la preuve de l'inégalité de Poincaré.
5. En utilisant la relation $G\,G^{-1} = 1$ et le fait que $\nabla_x(G^{-1}) = x\,G^{-1}$, on obtient une forme équivalente de l'équation de Fokker-Planck :

$$\begin{aligned}
\partial_t f &= \mathrm{div}_x\big(\nabla_x f + G\,f\,\nabla_x G^{-1}\big) \\
&= \mathrm{div}_x\big(G\nabla_x(f\,G^{-1})\big).
\end{aligned}$$

6. Quitte à remplacer $f(t,\cdot)$ par $f(t,\cdot) - \langle f_0\rangle$, on peut supposer que $\langle f(t,\cdot)\rangle = 0$ pour tout t d'après la question 5. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} f^2\,G^{-1} &= \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_t f)\,f\,G^{-1}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{div}_x\left(G\nabla_x\left(\frac{f}{G}\right)\right)\,\frac{f}{G}\,dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} G\left|\nabla_x \frac{f}{G}\right|^2 dx.
\end{aligned}$$

On utilise ensuite l'inégalité de Poincaré démontrée à la question 4. que l'on applique à la fonction $g = f(t,.)/G$. On remarque de plus que $\langle g \rangle_G = 0$, ce qui nous donne

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} f^2\,G^{-1} \leq -C_P \int_{\mathbb{R}^n} G\left(\frac{f}{G}\right)^2 dx = -C_P \int_{\mathbb{R}^n} f^2\,G^{-1}\; dx,$$

puis on conclut grâce au lemme de Gronwall.