Corrigé TD n°7.

Exercice 1

1. a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|G(x)| \leq |x| \, ||G'||_\infty$. Donc $|G \circ u| \leq |u| \, ||G'||_\infty$ et, si $u \in H^1 \subset L^2$, $G \circ u \in L^2$.
b) Si u est de classe $\mathcal{C}^1$, alors $G \circ u$ est dérivable au sens classique, de dérivées partielles :

$$\partial_j (G \circ u) = (G' \circ u) \partial_j u.$$

On suppose maintenant seulement $u \in H^1(\Omega)$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $\mathcal{C}^1$ convergeant vers u dans $H^1(\Omega)$.
La suite $(G \circ u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans L^2 vers $G \circ u$. En effet, pour tout n :

$$\begin{aligned} & |G \circ u_n - G \circ u| \leq ||G'||_\infty |u_n - u| \\ \Rightarrow \qquad & \|G \circ u_n - G \circ u\|_2 \leq \|G'\|_\infty ||u_n - u||_2. \end{aligned}$$

Quitte à extraire, on peut supposer que u_n converge simplement vers u presque partout (propriété de L^2). Alors, $(G' \circ u_n)\partial_j u_n$ converge dans L^2 vers $(G' \circ u)\partial_j u$. En effet :

$$\begin{aligned} \left\|(G' \circ u_n)\partial_j u_n - (G' \circ u)\partial_j u\right\|_2 &\leq \|(G' \circ u_n)(\partial_j u_n - \partial_j u)\|_2 + \|\partial_j u (G' \circ u_n - G' \circ u)\|_2 \\ &\leq \|G'\|_\infty \|\partial_j u_n - \partial_j u\|_2 + \|\partial_j u (G' \circ u_n - G' \circ u)\|_2. \end{aligned}$$

Puisque G' est continue, $G' \circ u_n - G' \circ u$ converge simplement vers 0 presque partout. Par le théorème de convergence dominée, on a alors $\|\partial_j u (G' \circ u_n - G' \circ u)\|_2 \to 0$. Cela implique que

$$\left\|(G' \circ u_n)\partial_j u_n - (G' \circ u)\partial_j u\right\|_2 \to 0.$$

Donc $G \circ u_n$ converge dans H^1 : c'est une suite de Cauchy dont toutes les dérivées partielles forment une suite de Cauchy. Sa limite est $G \circ u$ (puisque les limites dans L^2 et H^1 coïncident, si les deux existent). Donc $G \circ u \in H^1$ et, pour tout j :

$$\partial_j (G \circ u) = \lim_{n \to +\infty} \partial_j (G \circ u_n) = \lim_{n \to +\infty} (G' \circ u_n) \partial_j u_n = (G' \circ u)\partial_j u.$$

2. a) Posons $G(t) = e^{-1/t^2}$ si $t > 0$ et $G(t) = 0$ sinon. Cette fonction convient.
b) La fonction $G \circ u$ appartient à H^1, d'après la question 1. De plus, elle est nulle sur le bord de Ω, puisque $u \leq 0$ sur $\partial\Omega$ et $G = 0$ sur $\mathbb{R}^-$.
Comme H^1_0 est l'ensemble des fonctions dont la trace sur $\partial\Omega$ est nulle, $G \circ u \in H^1_0$. Donc $\langle Lu, G \circ u \rangle = 0$, d'après la définition d'une solution au sens faible.
Ainsi :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}(x) \partial_j u(x) \partial_i u(x) (G' \circ u(x)) dx \\ &\geq \int_\Omega \lambda |\nabla u(x)|^2 (G' \circ u(x)) dx. \end{aligned}$$

c) La fonction $x \mapsto |\nabla u(x)|^2 (G' \circ u(x))$ est à valeurs positives. Puisque son intégrale est nulle, elle doit être nulle presque partout. Donc $(\nabla u)(G' \circ u) = 0$ presque partout. Puisque $(\nabla u)(G' \circ u) = \nabla(G \circ u)$, la fonction $G \circ u$ est de gradient nul presque partout. Comme elle vaut 0 sur le bord de Ω, cette fonction est nulle, ce qui entraîne $u \leq 0$ sur presque tout Ω.

Exercice 2

1. Soit $c \in \mathbb{R}$. Comme suggéré dans l'énoncé, on introduit $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(B(R))$ telle que $0 \leq \eta \leq 1$, qui vaut 1 sur $B(r)$ et telle que $|\nabla \eta| \leq 2/(R-r)$. On pose $\phi = (u-c)\eta^2 \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Comme u est harmonique, on a $\int_\Omega \phi\, \Delta u\, dx = 0$ (intégrale bien définie car ϕ est à support compact). En intégrant par parties, on a :

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \left(\eta^2 \nabla u + 2(u-c)\eta \nabla \eta\right)\, dx = 0.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \eta^2 |\nabla u|^2\, dx &= -2 \int_\Omega (u-c)\eta \nabla u \cdot \nabla \eta\, dx \\
&\leq 2 \int_\Omega |u-c|\eta |\nabla u||\nabla \eta|\, dx \\
&\leq 2 \left(\int_\Omega |u-c|^2 |\nabla \eta|^2\, dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\, \eta^2\, dx\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

On en déduit en utilisant le fait que $\nabla \eta$ est à support dans $B(R) \setminus B(r)$ et $|\nabla \eta| \leq 2(R-r)$:

$$\begin{aligned}
\int_{B(r)} |\nabla u|^2\, dx \leq \int_\Omega \eta^2 |\nabla u|^2\, dx &\leq 4 \int_\Omega |u-c|^2 |\nabla \eta|^2\, dx \\
&\leq \frac{16}{(R-r)^2} \int_{B(R)\setminus B(r)} |u-c|^2\, dx.
\end{aligned}$$

2. D'après la question précédente, pour tout $R' < R$, on a une estimations du type

$$\int_{B(R')} |\nabla u|^2\, dx \leq C(R,R') \int_{B(R)} |u|^2\, dx$$

où $C(R,R')$ est une constante strictement positive dépendant de R et R'. Si $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ est harmonique, ses dérivées le sont également. On en déduit alors que pour $R'' < R'$, on a :

$$\int_{B(R'')} |\nabla^2 u|^2\, dx \leq C(R',R'') \int_{B(R')} |\nabla u|^2\, dx \leq C(R',R'')C(R,R') \int_{B(R)} |u|^2\, dx.$$

On obtient le résultat voulu en itérant cet argument.

3. On introduit une approximation de l'identité $\phi_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-n}\phi(y/\varepsilon)$ où $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty$, $\phi \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}^n} \phi\, dx = 1$. Soit $u \in H^1(\Omega)$. On pose $u_\varepsilon = u * \phi_\varepsilon$. Alors $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$ où $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)) > \varepsilon\}$. De plus, u_ε est harmonique car

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \varphi\, dx &= \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\int_{\mathbb{R}^n} u(y) \nabla_x \phi_\varepsilon(x-y)\, dy\right) \cdot \nabla \varphi(x)\, dx \\
&= \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \nabla_x u(x-y) \phi_\varepsilon(y)\, dy\right) \cdot \nabla \varphi(x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla_x u(x-y) \cdot \nabla \varphi(x)\, dx\right) \phi_\varepsilon(y)\, dy = 0.
\end{aligned}$$

On peut donc appliquer la question précédente à u_ε. Comme u_ε converge vers u dans $L^2(B(R))$, on obtient que u_ε est de Cauchy dans $H^k(B(R/2))$ et en passant à la limite on obtient que $u \in H^k(B(R/2))$ (u étant la limite de u_ε dans $L^2(B(R))$, par unicité, c'est également la limite de u_ε dans $H^k(B(R/2))$). Ainsi, on a prouvé que pour tout $s \in \mathbb{N}$, il existe $R_s > 0$ tel que $u \in H^s(B(R_s))$, on peut ainsi conclure en utilisant l'injection de Sobolev $H^s \subset \mathcal{C}^{[s-n/2]}$.

Exercice 3

Soit $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ positive et valant 1 sur Ω'. La fonction $\eta^2 u$ est dans $H_0^1(\Omega)$ (c'est une fonction de H^1 nulle au voisinage de $\partial\Omega$).
Calculons $\langle Lu, \eta^2 u\rangle = \langle f, \eta^2 u\rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle Lu, \eta^2 u\rangle &= \sum_{i,j=1}^d \int_\Omega a_{ij}(\partial_{x_j} u)\partial_{x_i}\left[\eta^2 u\right] + \sum_{i=1}^d \int_\Omega b_i(\partial_{x_i} u)\eta^2 u + \int_\Omega c u^2 \eta^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^d \int_\Omega \eta^2 a_{ij}(\partial_{x_j} u)(\partial_{x_i} u) + 2\sum_{i,j=1}^d \int_\Omega a_{ij} u(\partial_{x_j} u)\eta(\partial_{x_i}\eta) \\
&\quad + \sum_{i=1}^d \int_\Omega b_i(\partial_{x_i} u)\eta^2 u + \int_\Omega c u^2 \eta^2.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\alpha \int_\Omega \eta^2 |\nabla u|^2 &\leq \sum_{i,j=1}^d \int_\Omega \eta^2 a_{ij}(\partial_{x_j} u)(\partial_{x_i} u) \\
&\leq \int_\Omega (|f|\eta^2|u| + |c|u^2\eta^2) + 2C'\int_\Omega |u||\nabla u|\eta|\nabla\eta| + C''\int_\Omega |u||\nabla u|\eta^2 \\
&\leq \int_\Omega (|f|\eta^2|u| + |c|u^2\eta^2) \\
&\quad + \left(\int_\Omega \eta^2|\nabla u|^2\right)^{1/2}\left[2C'\left(\int_\Omega u^2|\nabla\eta|^2\right)^{1/2} + C''\left(\int_\Omega u^2\eta^2\right)^{1/2}\right]
\end{aligned}$$

Une inégalité de la forme $x^2 \leq ax + b$ avec $b \geq 0$ implique $x^2 \leq a^2 + 2b$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \eta^2|\nabla u|^2 &\leq \frac{1}{\alpha^2}\left[2C'\left(\int_\Omega u^2|\nabla\eta|^2\right)^{1/2} + C''\left(\int_\Omega u^2\eta^2\right)^{1/2}\right]^2 + \frac{2}{\alpha}\int_\Omega \eta^2(|fu| + |c|u^2) \\
&\leq \frac{8C'^2}{\alpha^2}\int_\Omega u^2|\nabla\eta|^2 + \frac{2C''^2}{\alpha^2}\int_\Omega u^2\eta^2 + \frac{2}{\alpha}\int_\Omega \eta^2(|fu| + |c|u^2) \\
&\leq \frac{8C'^2}{\alpha^2}\|\nabla\eta\|_\infty^2\int_\Omega u^2 + \frac{2C''^2}{\alpha^2}\|\eta\|_\infty^2\int_\Omega u^2 + \frac{2}{\alpha}\|\eta\|_\infty^2\int_\Omega\left(\frac{1}{2}f^2 + \left(\frac{1}{2} + \|c\|_\infty\right)u^2\right) \\
&\leq C\int_\Omega (u^2 + f^2)
\end{aligned}$$

pour une constante C bien choisie.

Comme $\eta = 1$ sur Ω', cela donne :

$$\int_{\Omega'} |\nabla u|^2 \leq \int_\Omega \eta^2 |\nabla u|^2 \leq C \int_\Omega \left(u^2 + f^2\right).$$

Exercice 4

1. Soit $r \leq R$.

a) En réalisant un calcul similaire à celui de l'exercice précédent, dans le cas où $Lu = -\mathrm{div}(A\nabla u)$ et $f = 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\alpha \int_{B(r)} \eta^2 |\nabla u|^2 &\leq \int_{B(r)} \eta^2 \nabla u \cdot A \nabla u \, dx \\
&= \int_{B(r)} \nabla(\eta^2 u) \cdot A\nabla u \, dx - 2 \int_{B(r)} \eta u \nabla \eta \cdot A \nabla u \, dx \\
&= -2 \int_{B(r)} \eta u \nabla \eta \cdot A \nabla u \, dx.
\end{aligned}$$

Or on a :

$$\begin{aligned}
\left| \int_{B(r)} \eta u \nabla \eta \cdot A \nabla u \, dx \right| &\leq \left(\int_{B(r)} u^2 |\nabla \eta|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{B(r)} \eta^2 |A \nabla u|^2 \, dx \right)^{1/2} \\
&\leq \|A\|_\infty \left(\int_{B(r)} u^2 |\nabla \eta|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{B(r)} \eta^2 |\nabla u|^2 \, dx \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de r telle que

$$\forall \, \eta \in \mathcal{C}_c^\infty(B(r)), \quad \int_{B(r)} \eta^2 |\nabla u|^2 \, dx \leq C \int_{B(r)} |u|^2 |\nabla \eta|^2 \, dx.$$

b) On choisit une fonction η qui vaut 1 sur $B(r/2)$, 0 en dehors de $B(2r/3)$ et telle que $\|\nabla \eta\|_\infty \leq K/r$ pour un certain $K > 0$. En utilisant l'inégalité précédente pour ce η, on obtient :

$$\int_{B(r/2)} |\nabla u|^2 \, dx \leq \frac{C'}{r^2} \int_{B(r) \setminus B(r/2)} |u|^2 \, dx.$$

Si $u \in H^1(B(r))$ satisfait $\mathrm{div}(A\nabla u) = 0$, on a aussi $u - u_{B(r)\setminus B(r/2)} \in H^1(B(r))$ et $\mathrm{div}(A\nabla(u - u_{B(r)\setminus B(r/2)})) = 0$. On en déduit alors

$$\int_{B(r/2)} |\nabla u|^2 \, dx \leq \frac{C'}{r^2} \int_{B(r)\setminus B(r/2)} |u - u_{B(r)\setminus B(r/2)}|^2 \, dx.$$

2. Comme suggéré, introduisons $\widetilde{u}(x) = u(rx)$. Alors $\widetilde{u} \in H^1(B(1) \setminus B(1/2))$. D'après l'inégalité de Poincaré-Sobolev rappelée dans l'énoncé, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\int_{B(1)\setminus B(1/2)} |\widetilde{u} - \widetilde{u}_{B(1)\setminus B(1/2)}|^2 \, dx \leq c \int_{B(1)\setminus B(1/2)} |\nabla \widetilde{u}|^2 \, dx.$$

D'autre part, $\widetilde{u}_{B(1)\setminus B(1/2)} = u_{B(r)\setminus B(r/2)}$ et $\nabla\widetilde{u}(x) = r\nabla u(rx)$. On en déduit alors le résultat voulu par changement de variable.
3. En combinant les résultats des questions 1. et 2. on obtient l'existence d'une constante θ indépendante de r telle que

$$\int_{B(r/2)} |\nabla u|^2\,dx \leq \theta \int_{B(r)\setminus B(r/2)} |\nabla u|^2\,dx.$$

En ajoutant $\theta \int_{B(r/2)} |\nabla u|^2\,dx$ aux deux membres de l'inégalité on trouve que

$$\int_{B(r/2)} |\nabla u|^2\,dx \leq \frac{\theta}{1+\theta} \int_{B(r)} |\nabla u|^2\,dx.$$

4. Soit $r \in]0,R]$. On introduit k l'unique entier tel que $2^{-k-1} \leq r/R < 2^{-k}$. Alors, on a :

$$f(r) \leq f(2^{-k}R) \leq 2^{-k\alpha} f(R) \leq \left(\frac{2r}{R}\right)^{\alpha} f(R).$$

5. Soit $\alpha > 0$ tel que $2^{-\alpha} = \theta/(1+\theta)$. On déduit alors de la question précédente que

$$\forall\, r \in [0,R], \quad \int_{B(r)} |\nabla u|^2\,dx \leq 2^{\alpha}\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha} \int_{B(R)} |\nabla u|^2\,dx.$$

On utilise alors l'inégalité donnée à la question 2. :

$$\int_{B(r)} \left|u(y) - u_{B(r)}\right|^2\,dy \leq cr^2 \int_{B(r)} |\nabla u|^2.$$

Ceci permet d'aboutir à

$$\int_{B(r)} \left|u(y) - u_{B(r)}\right|^2\,dy \leq \left(c\frac{2^{\alpha}}{R^{\alpha}} \int_{B(R)} |\nabla u|^2\,dx\right) r^{2+\alpha}.$$

Exercice 5

Dans tout l'exercice, on note $\|\cdot\|$ la norme $\|\cdot\|_{L^2}$ et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2}$.
1. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur le troisième terme de la fonctionnelle :

$$\begin{aligned} Ct^2\langle\partial_x h, \partial_v h\rangle &\geq -Ct^2\|\partial_v h\|\|\partial_x h\| = -(C\sqrt{t}\|\partial_v h\|)\,(t^{3/2}\|\partial_x h\|) \\ &\geq -\frac{C^2}{2}t\|\partial_v h\|^2 - \frac{1}{2}t^3\|\partial_x h\|^2 \\ &\geq -\frac{B}{2}t\|\partial_v h\|^2 - \frac{1}{2}t^3\|\partial_x h\|^2 \end{aligned}$$

en supposant $C^2 \leq B$. D'où l'inégalité voulue :

$$\mathcal{F}(t,h) \geq A\|h\|^2 + \frac{B}{2}t\|\partial_v h\|^2 + \frac{1}{2}t^3\|\partial_x h\|^2.$$

2. Il faut calculer la dérivée par rapport au temps de chaque terme de la fonctionnelle, calcul que l'on fait pour $f_t \in \mathcal{S}$ pour tout $t \geq 0$. On remarque alors avant de démarrer les calculs qu'en intégrant par parties aussi bien en x (sur la sphère qui n'a pas de bord) qu'en v (on intègre des fonctions Schwartz), il n'y aura pas de termes de bords qui apparaissent. Dans les calculs qui suivent, on sous-entend la dépendance en t de f_t que l'on note simplement f.
On a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{F}(t,f) = A\frac{d}{dt}\|f\|^2 + B\|\partial_v f\|^2 + Bt\frac{d}{dt}\|\partial_v f\|^2 + 2Ct\langle\partial_x f, \partial_v f\rangle \\ + Ct^2\frac{d}{dt}\langle\partial_x f, \partial_v f\rangle + 3t^2\|\partial_x f\|^2 + t^3\frac{d}{dt}\|\partial_x f\|^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Pour le premier terme, en utilisant $\partial_t f = -v\partial_x f + \partial_{vv} f$, on a :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|f\|^2 = \langle -v\partial_x f + \partial_{vv} f, f\rangle = \int_{\mathbb{S}\times\mathbb{R}} (-v\partial_x(f^2/2) - (\partial_v f)^2)\, dv\, dx$$

où l'on a réalisé une intégration par parties pour le deuxième terme. Le premier terme est nul car on intègre sur la sphère en x. On obtient donc :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|f\|^2 = -\|\partial_v f\|^2. \tag{2}$$

On calcule ensuite la dérivée par rapport à t du terme $\|\partial_v f\|^2$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_v f\|^2 = \langle\partial_v(Lf), \partial_v f\rangle = \langle L(\partial_v f), \partial_v f\rangle + \langle[\partial_v, L]f, \partial_v f\rangle = -\|\partial_{vv} f\|^2 + \langle[\partial_v, L]f, \partial_v f\rangle$$

où l'on a utilisé le calcul effectué précédemment sur f à $\partial_v f$. Concernant le commutateur, on a :

$$[\partial_v, L] = -[\partial_v, v\partial_x] + [\partial_v, \partial_{vv}] = -\partial_x.$$

On a donc :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_v f\|^2 = -\|\partial_{vv} f\|^2 - \langle\partial_x f, \partial_v f\rangle. \tag{3}$$

Concernant le terme mixant les dérivées en x et en v, on calcule en utilisant le fait que $[\partial_x, L] = 0$ et $[\partial_v, L] = -\partial_x$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle\partial_x f, \partial_v f\rangle &= \langle L(\partial_x f), \partial_v f\rangle + \langle\partial_x f, L(\partial_v f)\rangle - \|\partial_x f\|^2 \\ &= -\langle v\partial_{xx} f, \partial_v f\rangle + \langle\partial_{vvx} f, \partial_v f\rangle - \langle\partial_x f, v\partial_{xv} f\rangle + \langle\partial_x f, \partial_{vvv} f\rangle - \|\partial_x f\|^2 \\ &= \langle\partial_{xvv} f, \partial_v f\rangle + \langle\partial_x f, \partial_{vvv} f\rangle - \|\partial_x f\|^2 \end{aligned}$$

où on a fait une intégration par parties en x sur le premier terme pour voir qu'il s'annule avec le troisième. Puis en faisant une intégration par parties en v sur chaque terme :

$$\frac{d}{dt}\langle\partial_x f, \partial_v f\rangle = -2\langle\partial_{xv} f, \partial_{vv} f\rangle - \|\partial_x f\|^2. \tag{4}$$

Finalement, la dérivée par rapport à t de $\|\partial_x f\|^2$ est simple à calculer car $[\partial_x, L] = 0$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_x f\|^2 = -\|\partial_{vx} f\|^2. \tag{5}$$

En revenant à (1) et en utilisant (2), (3), (4) et (5), on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{F}(t,f) = &-(2A-B)\|\partial_v f\|^2 - 2Bt\|\partial_{vv} f\|^2 - 2(B-C)t\langle\partial_x f, \partial_v f\rangle \\ &- 2Ct^2\langle\partial_{xv} f, \partial_{vv} f\rangle - (C-3)t^2\|\partial_x f\|^2 - 2t^3\|\partial_{vx} f\|^2\end{aligned}$$

Pour les termes sans signe, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{cases} 2|B-C|t\langle\partial_x f, \partial_v f\rangle| \leq 2(B+C)t\|\partial_x f\|\|\partial_v f\| \leq (B+C)^2\|\partial_v f\|^2 + t^2\|\partial_x f\|^2 \\ 2Ct^2|\langle\partial_{xv} f, \partial_{vv} f\rangle| \leq 2Ct^2\|\partial_{xv} f\|\|\partial_{vv} f\| \leq t^3\|\partial_{xv} f\|^2 + C^2 t\|\partial_{vv} f\|^2. \end{cases}$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{F}(t,f) \leq &-(2A-B-(B+C)^2)\|\partial_v f\|^2 - (2B-C^2)t\|\partial_{vv} f\|^2 \\ &- (C-4)t^2\|\partial_x f\|^2 - t^3\|\partial_{vx} f\|^2.\end{aligned}$$

En prenant $C \geq 4$, puis $B \geq \max(\sqrt{C}, C^2/2)$ et enfin A tel que $2A - B - (B+C)^2 \geq 0$, on a le résultat voulu :

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \frac{d}{dt}\mathcal{F}(t,f) \leq 0.$$

3. Si $f_t \in \mathcal{S}$ pour tout $t \geq 0$, d'après les questions 1. et 2., on a :

$$\forall\, t \in [0,1], \quad A\|f_t\|^2 + \frac{B}{2}t\|\partial_v f_t\|^2 + \frac{1}{2}t^3\|\partial_x f_t\|^2 \leq \mathcal{F}(t, f_t) \leq \mathcal{F}(0, f_0) = A\|f_0\|^2.$$

En particulier, on a :

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \frac{B}{2}t\|\partial_v f_t\|^2 \leq A\|f_0\|^2$$

et pour une certaine constante $D > 0$, comme $t \in [0,1]$,

$$Dt^3\|f_t\|^2_{H^1} \leq A\|f_0\|^2.$$

On en déduit les estimations voulues pour $f_0 \in \mathcal{S}$ et on conclut par densité.

Exercice 6

Dans tout l'exercice, on note $\|\cdot\|$ la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^2}$ et $(\cdot,\cdot)$ le produit scalaire $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{L}^2}$.

1. a) On utilise dans le calcul le fait que $\partial_v \mu = -v\mu$. Ainsi, en notant $F = \mu + \mu f$, on a

$$\partial_v F = -v\mu - v\mu f + \mu\partial_v f,$$

$$\partial_v(vF) = \mu + \mu f - v^2\mu - v^2\mu f + v\mu\partial_v f = \mu(1-v^2)(f+1) + v\mu\partial_v f$$

et

$$\begin{aligned}\partial_{vv}F &= -\mu + v^2\mu - \mu f + v^2\mu f - v\mu\partial_v f - v\mu\partial_v f + \mu\partial_{vv} f\\ &= \mu(v^2-1)(f+1) - 2v\mu\partial_v f + \mu\partial_{vv} f\end{aligned}$$

Donc

$$\partial_v(vF) + \partial_{vv}F = -v\mu\partial_v f + \mu\partial_{vv} f$$

et finalement

$$\begin{aligned}\partial_t f = -v\partial_x f + (-v+\partial_v)\partial_v f &\Leftrightarrow \mu\partial_t f = \mu(-v\partial_x f + (-v+\partial_v)\partial_v f)\\ &\Leftrightarrow \partial_t F = -v\partial_x F - v\mu\partial_v f + \mu\partial_{vv} f\\ &\Leftrightarrow \partial_t F + v\partial_x F = \partial_{vv}F + \partial_v(vF).\end{aligned}$$

b) On a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{S}\times\mathbb{R}} f_t\, d\mu\, dx &= \int_{\mathbb{S}\times\mathbb{R}} (-v\partial_x f_t + (-v+\partial_v)\partial_v f_t)\, d\mu\, dx\\ &= \int_{\mathbb{S}\times\mathbb{R}} \partial_x(-vf_t\mu)\, dx\, dv + \int_{\mathbb{S}\times\mathbb{R}} ((\partial_v f)(\partial_v \mu) + (\partial_{vv} f)\mu)\, dv\, dx = 0\end{aligned}$$

d'où le résultat.

2. a) Soit $h \in \mathcal{H}^1$. On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$C(\partial_v h, \partial_x h) \geq -C\|\partial_v h\|\|\partial_x h\| \geq -\frac{C^2}{2}\|\partial_v h\|^2 - \frac{1}{2}\|\partial_x h\|^2 - \frac{B}{2}\|\partial_v h\|^2 - \frac{1}{2}\|\partial_x h\|^2$$

d'où

$$\mathcal{G}(h) \geq A\|h\|^2_{\mathcal{L}^2} + \frac{B}{2}\|\partial_v h\|^2_{\mathcal{L}^2} + \frac{1}{2}\|\partial_x h\|^2_{\mathcal{L}^2} \geq D_1\|h\|^2_{\mathcal{H}^1}$$

pour une certaine constante $D_1 > 0$. La majoration de $\mathcal{G}(h)$ par $\|h\|^2_{\mathcal{H}^1}$ à une constante multiplicative près s'obtient également avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz et on obtient l'estimation voulue.

b) Tout comme dans l'exercice 4, il faut calculer la dérivée par rapport au temps de chaque terme de la fonctionnelle, calcul que l'on fait pour $f_t \in \mathcal{S}$ pour tout $t \geq 0$. On remarque ici aussi qu'en intégrant par parties en x (sur la sphère qui n'a pas de bord), il n'y aura pas de termes de bords qui apparaissent. On remarque également qu'en intégrant par parties en v par rapport à $d\mu$, deux termes apparaissent : si f et g sont des fonctions Schwartz, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} (\partial_v f) g\, d\mu = -\int_{\mathbb{R}} f(\partial_v g)\, d\mu + \int_{\mathbb{R}} f g\, v\, d\mu$$

et donc

$$(\partial_v f, g) = -(f, (-v+\partial_v)g) = (f, (-\partial_v + v)g).$$

Dans les calculs qui suivent, on sous-entend la dépendance en t de f_t que l'on note simplement f. Les calculs sont similaires à ceux de l'exercice précédent et sont ici moins détaillés.

On a pour le premier terme :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|f\|^2 = \underbrace{(-v\partial_x f, f)}_{0} + ((-v+\partial_v)\partial_v f, f) = -\|\partial_v f\|^2.$$

Le deuxième terme donne en utilisant $[\partial_v, v\partial_x] = \partial_x$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_v f\|^2 &= -(\partial_v(v\partial_x f + (-\partial_v + v)\partial_v f), \partial_v f) \\
&= -\underbrace{(v\partial_x(\partial_v f), \partial_v f)}_{0} - ([\partial_v, v\partial_x]f, \partial_v f) - (\partial_v(-\partial_v + v)\partial_v f, \partial_v f) \\
&= -(\partial_x f, \partial_v f) - (\partial_v(-\partial_v + v)\partial_v f, \partial_v f) \\
&= -(\partial_x f, \partial_v f) - \|(-\partial_v + v)\partial_v f\|^2
\end{aligned}$$

en faisant une intégration par parties en v pour le dernier terme. Le troisième terme donne :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\partial_x f, \partial_v f) &= -(\partial_x(v\partial_x f + (-\partial_v + v)\partial_v f), \partial_v f) - (\partial_x f, \partial_v(v\partial_x f + (-\partial_v + v)\partial_v f)) \\
&= -(v\partial_{xx} f, \partial_v f) + ((-\partial_v + v)\partial_v f, \partial_{xv} f) - (\partial_x f, [\partial_v, v\partial_x]f) - (\partial_x f, v\partial_{xv} f) \\
&\quad - (\partial_x f, \partial_v(-\partial_v + v)\partial_v f).
\end{aligned}$$

Dans cette dernière expression, le premier et le quatrième termes se simplifient. On traite le dernier terme en utilisant $[\partial_v, (-\partial_v + v)] = 1$:

$$\begin{aligned}
-(\partial_x f, \partial_v(-\partial_v + v)\partial_v f) &= (f, \partial_v(-\partial_v + v)\partial_{vx} f) \\
&= ((-\partial_v + v)f, (-\partial_v + v)\partial_{vx} f) \\
&= (\partial_v(-\partial_v + v)f, \partial_{vx} f) \\
&= ([\partial_v, (-\partial_v + v)]f, \partial_{vx} f) + ((-\partial_v + v)\partial_v f, \partial_{vx} f) \\
&= (\partial_x f, \partial_v f) + ((-\partial_v + v)\partial_v f, \partial_{vx} f).
\end{aligned}$$

Finalement, en utilisant $[\partial_v, v\partial_x] = \partial_x$, on obtient :

$$\frac{d}{dt}(\partial_x f, \partial_v f) = 2((-\partial_v + v)\partial_v f, \partial_{vx} f) - \|\partial_x f\|^2 + (\partial_x f, \partial_v f).$$

Finalement, en observant que $[\partial_x, L] = 0$, on a :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_x f\|^2 = -\|\partial_{vx} f\|^2.$$

En regroupant les estimations, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{G}(f) &= -2A\|\partial_v f\|^2 - 2B\|(-\partial_v + v)\partial_v f\|^2 - C\|\partial_x f\|^2 - 2\|\partial_{vx} f\|^2 \\
&\quad - 2(B - C)(\partial_x f, \partial_v f) + 2C((-\partial_v + v)\partial_v f, \partial_{vx} f).
\end{aligned}$$

Pour les termes qui n'ont pas de signe, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{cases}
|2(B - C)(\partial_x f, \partial_v f)| \leq \|\partial_x f\|^2 + (B + C)^2\|\partial_v f\|^2 \\
|2C((-\partial_v + v)\partial_v f, \partial_{vx} f)| \leq \|\partial_{xv} f\|^2 + C^2\|(-\partial_v + v)\partial_v f\|^2.
\end{cases}$$

Alors, en prenant C assez grand puis B puis A, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{G}(f) &= (-2A + (B + C)^2)\|\partial_v f\|^2 + (-2B + C^2)\|(-\partial_v + v)\partial_v f\|^2 + (-C + 1)\|\partial_x f\|^2 \\
&\leq -\frac{C}{2}\left(\|\partial_v f\|^2 + \|\partial_x f\|^2\right).
\end{aligned}$$

c) En utilisant l'inégalité de Poincaré pour $f_t = f$ pour tout $t \geq 0$ (ce qui est légitime d'après la question 1.b)),

$$\frac{d}{dt}\mathcal{G}(f) \leq -\frac{C}{4}\left(\|\partial_v f\|^2 + \|\partial_x f\|^2\right) - \frac{C}{4}C_P\|f\|^2 \leq -\kappa\mathcal{G}(f)$$

où $C_P > 0$ est la constante provenant de l'inégalité de Poincaré et κ est une constante strictement positive (on a utilisé l'équivalence prouvée dans la question 2.a)). On conclut avec le lemme de Gronwall.
d) L'estimation provient de la question 2.a).
3. Si $t \leq 1$, on a l'estimation voulue d'après le résultat donné dans l'énoncé :

$$\|f_t\|_{\mathcal{H}^1} \leq \frac{C_1}{t^{3/2}} = \frac{C_1}{\min(t^{3/2}, 1)} \leq C_1 e^{\kappa}\frac{e^{-\kappa t}}{\min(t^{3/2}, 1)}.$$

Si $t \geq 1$, de la même manière que précédemment, on peut montrer que

$$\|g_{t-1}\|_{\mathcal{H}^1} \leq C_0 e^{-\kappa(t-1)}\|f_1\|_{\mathcal{H}^1}.$$

Puis on applique le résultat donné dans l'énoncé à f_1 qui nous donne que $\|f_1\|_{\mathcal{H}^1} \leq C_1\|f_0\|_{\mathcal{L}^2}$. Finalement, on obtient

$$\|g_{t-1}\|_{\mathcal{H}^1} = \|f_t\|_{\mathcal{H}^1} \leq C_0 C_1 e^{\kappa} e^{-\kappa t}\|f_0\|_{\mathcal{L}^2} = C_0 C_1 e^{\kappa}\frac{e^{-\kappa t}}{\min(t^{3/2}, 1)}\|f_0\|_{\mathcal{L}^2}.$$