Corrigé TD n°8.

Exercice 1

1. a) On utilise le lemme 1.1 avec $v = \phi_{k+1} u_{k+1}$, ce qui donne :

$$\left(\int (\phi_{k+1} u_{k+1})^p \, dx\right)^{2/p} \le C_1 \int |\nabla(\phi_{k+1} u_{k+1})|^2 \, dx.$$

On applique ensuite le lemme 1.2 (ce qui est légitime car si $Lu = 0$ alors $L(u - C_k) = 0$. On en déduit :

$$\int |\nabla(\phi_{k+1} u_{k+1})|^2 \, dx \le C_2 C_0^2 2^{2(k+1)} \int_{\text{supp}(\phi_{k+1})} |u_{k+1}|^2 \, dx.$$

De plus,

$$\mathbb{1}_{\text{supp}(\phi_{k+1})} \le \mathbb{1}_{\tilde{B}_k} \quad \text{et} \quad u_{k+1} \le u_k.$$

La première inégalité est claire. Pour la deuxième, si $u \le C_{k+1}$, l'inégalité est évidente. Et si $u \ge C_{k+1}$, alors $u \ge C_k$ et $u_{k+1} = u - C_{k+1} \le u - C_k = u_k$. Donc pour tout $k \ge 1$,

$$\left(\int (\phi_{k+1} u_{k+1})^p \, dx\right)^{2/p} \le C_1 C_2 C_0^2 2^{2(k+1)} \int |\phi_k u_k|^2 \, dx \le C^k U_k$$

pour une certaine constante $C > 1$.
b) Remarquons qu'on a $\mathbb{1}_{\tilde{B}_{k+1}} \le \phi_{k+1}$. On utilise l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned} U_{k+1} &\le \int (\phi_{k+1} u_{k+1})^2 \, dx = \int (\phi_{k+1} u_{k+1})^2 \, \mathbb{1}_{|\{\phi_{k+1} u_{k+1} > 0\}|} \, dx \\ &\le \left(\int (\phi_{k+1} u_{k+1})^p \, dx\right)^{2/p} |\{\phi_{k+1} u_{k+1} > 0\}|^{2/n}. \end{aligned}$$

De plus, $\phi_{k+1} u_{k+1} > 0$ implique $\phi_{k+1} > 0$ et $u_{k+1} > 0$. D'une part, on remarque que si $\phi_{k+1}(x) > 0$ alors $x \in \tilde{B}_k$ et donc $\mathbb{1}_{\tilde{B}_k}(x) = 1$. D'autre part, $u_{k+1} > 0$ implique que $u_{k+1} = u - C_{k+1}$ et $u_k = u - C_k$ puisque $C_{k+1} \ge C_k$. On en déduit alors également que $u_k - u_{k+1} = -C_k + C_{k+1} = 2^{-k-2}$. Finalement, on en déduit

$$\phi_{k+1}(x) u_{k+1}(x) > 0 \Rightarrow \mathbb{1}_{\tilde{B}_k}(x) u_k(x) - 2^{-k-2} = u_k(x) - 2^{-k-2} = u_{k+1}(x) > 0.$$

D'où en utilisant la question 1.a),

$$\begin{aligned} U_{k+1} &\le \left(\int (\phi_{k+1} u_{k+1})^p \, dx\right)^{2/p} |\{\mathbb{1}_{\tilde{B}_k} u_k > 2^{-k-2}\}|^{2/n} \\ &\le C^k U_k |\{(\mathbb{1}_{\tilde{B}_k} u_k)^2 > 2^{-2(k-2)}\}|^{2/n}. \end{aligned}$$

On utilise enfin l'inégalité de Markov et on suppose $k \ge 2$:

$$\begin{aligned} |\{(\phi_k u_k)^2 > 2^{-2(k-2)}\}|^{2/n} &\le \left(2^{2(k+2)} \int (\mathbb{1}_{\tilde{B}_k} u_k)^2 \, dx\right)^{2/n} \\ &\le \left(2^{2(k+2)} \int (\mathbb{1}_{\tilde{B}_k} u_k)^2 \, dx\right)^{2/n} \le 2^{8k/n} U_k^{2/n}. \end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$U_{k+1} \leq \frac{C^k}{2^{-8k/n}} U_k^{1+2/n} \leq (2^{8/n}C)^k U_k^{1+2/n}$$

ce qui donne le résultat voulu avec $\beta = 1 + 2/n$.

2. On considère $k_0 \geq 2$ tel que $2^{-k_0} \leq 1/(2C)^{1/(\beta-1)}$. Ce k_0 étant fixé, on peut choisir $\delta \leq 1$ tel que pour tout $k \leq k_0$, on ait

$$C^k U_k^{\beta-1} \leq \frac{1}{(2C)^{\frac{1}{\beta-1}}}.$$

Montrons maintenant par récurrence que cette inégalité est encore vraie pour $k \geq k_0$. On fixe $k > k_0$ et on suppose que l'inégalité est vraie pour tout $j \leq k$. Alors d'après la question 1.b) et l'hypothèse de récurrence, on a :

$$U_{k+1} \leq C^k U_k^{\beta} = C^k U_k^{\beta-1} U_k \leq \frac{1}{(2C)^{\frac{1}{\beta-1}}} U_k \leq ... \leq \frac{1}{(2C)^{\frac{k+1}{\beta-1}}} U_0 \leq \frac{1}{(2C)^{\frac{k+1}{\beta-1}}}$$

et donc

$$C^{k+1} U_{k+1}^{\beta-1} \leq 2^{-(k+1)} \leq \frac{1}{(2C)^{\frac{1}{\beta-1}}}.$$

3. On déduit de la question 2. qu'on a une inégalité de la forme

$$U_k^{\beta-1} \leq \frac{1}{(2C)^{\frac{1}{\beta-1}}} \left(\frac{1}{C}\right)^k$$

avec $C > 1$. Par comparaison avec une suite géométrique, on en déduit que $U_k \to 0$ à l'infini. Mais on a également $U_k \to \int_{B_{1/2}} (u - 1/2)_+^2 \, dx$ d'où $(u - 1/2)_+^2 = 0$ p.p. sur $B_{1/2}$ c'est-à-dire $\|u\|_{L^\infty(B_{1/2})} \leq 1/2$.

Exercice 2

1. Soit σ comme dans le lemme. Fixons $r \in]0; 1/2]$. Pour tout $x_0 \in B_1$, on a, en appliquant récursivement le lemme :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \sup_{B(x_0, 2^{-k}r)} u - \inf_{B(x_0, 2^{-k}r)} u \leq \sigma^k \left(\sup_{B(x_0,r)} u - \inf_{B(x_0,r)} u \right).$$

D'après le théorème 1.1 rappelé dans l'énoncé :

$$\sup_{B(x_0,r)} u \leq \sup_{B(x_0,r)} \max(0, u) \leq \sup_{B_{3/2}} \max(0, u) \leq c\|u\|_{L^2(B_2)}.$$

De même, en utilisant $-\inf_{B(x_0,r)} u = \sup_{B(x_0,r)}(-u)$, on a $\inf_{B(x_0,r)} u \geq -c\|u\|_{L^2(B_2)}$. On a donc, pour tous $x_0 \in B_1, r \in]0; 1/2], k \in \mathbb{N}$:

$$\sup_{B(x_0, 2^{-k}r)} u - \inf_{B(x_0, 2^{-k}r)} u \leq 2c\sigma^k \|u\|_{L^2(B_2)}.$$

Pour tous $x, y \in B_1$, si $|x - y| < r$:

$$|u(x) - u(y)| \leq \sup_{B(x, 2^{-k}r)} u - \inf_{B(x, 2^{-k}r)} u \leq 2c\sigma^k \|u\|_{L^2(B_2)}$$

pour $k = \left[\log_2 \frac{r}{|x-y|}\right]$. Comme $k \geq \log_2 r - \log_2 |x-y| - 1$, on en déduit :

$$|u(x) - u(y)| \leq 2c \exp\left(\log \sigma \left(\log_2 r - \log_2 |x-y| - 1\right)\right) \|u\|_{L^2(B_2)} \leq C|x-y|^\alpha \|u\|_{L^2(B_2)}$$

pour $\alpha = -\log_2 \sigma > 0$ et C indépendante de u.
Comme on a vu que $\sup_{B_1} |u| \leq c\|u\|_{L^2(B_2)}$, l'inégalité est également valable pour $|x-y| \geq r$, quitte à modifier la valeur de C. Cela montre donc que u est α-höldérienne, pour une valeur de α indépendante de u.
2. a) Soit $x \in D$. Alors, on a

$$1 \leq \bar{u}(x) - \bar{u}(x_0) = \int_0^1 \nabla \bar{u}((1-t)x_0 + tx) \cdot (x - x_0)\, dt.$$

En intégrant en $x \in D$ cette inégalité, on obtient :

$$\begin{aligned} |D| &\leq \int_D \int_0^1 |\nabla \bar{u}((1-t)x_0 + tx)||x - x_0|\, dt\, dx \\ &\leq \int_{B_1} \int_0^1 |\nabla \bar{u}((1-t)x_0 + tx)||x - x_0|\, dt\, dx. \end{aligned}$$

b) On fait le changement de variable $s = t|x - x_0|$ et on note $e(x) = (x - x_0)/|x - x_0|$, on obtient :

$$|D| \leq \int_{B_1} \int_0^{|x-x_0|} |\nabla \bar{u}|(x_0 + se(x))\, ds\, dx.$$

On prolonge $|\nabla \bar{u}|$ par 0 en dehors de B_1 et on note encore $|\nabla \bar{u}|$ ce prolongement. On peut alors écrire :

$$|D| \leq \int_{B_1} \int_0^\infty |\nabla \bar{u}|(x_0 + se(x))\, ds\, dx.$$

On passe en coordonnées polaires pour $x - x_0$ dans la dernière intégrale :

$$\begin{aligned} |D| &\leq \int_0^2 r^{n-1} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\int_0^\infty |\nabla \bar{u}|(x_0 + se)\, ds \right) de\, dr \\ &\leq \frac{2^n}{n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\int_0^\infty |\nabla \bar{u}|(x_0 + se)\, ds \right) de. \end{aligned}$$

On fait maintenant le changement de variables inverse en utilisant que $|\nabla \bar{u}|$ est à support dans B_1 :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\int_0^\infty |\nabla \bar{u}|(x_0 + se)\, ds \right) de &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^\infty s^{n-1} \frac{|\nabla \bar{u}|(x_0 + se)}{s^{n-1}}\, ds\, de \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla \bar{u}(x_0 + x)|}{|x|^{n-1}}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla \bar{u}|(y)}{|x_0 - y|^{n-1}}\, dy = \int_{B_1} \frac{|\nabla \bar{u}|(y)}{|x_0 - y|^{n-1}}\, dy, \end{aligned}$$

d'où

$$|D| \leq c_n \int_{B_1} \frac{|\nabla \bar{u}(y)|}{|x_0 - y|^{n-1}} dy, \quad c_n = \frac{2^n}{n}.$$

Finalement, en intégrant en $x_0 \in A$ cette inégalité, on obtient

$$|A||D| \leq c_n \int_{B_1} |\nabla \bar{u}|(y) \left(\int_A \frac{dx}{|x-y|^{n-1}} \right) dy.$$

c) On note ω_n la surface de la sphère unité de $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. On introduit le réel $r_0 > 0$ qui est tel que $\omega_n \frac{r_0^n}{n} = |B(x, r_0)| = |E|$. On a :

$$\int_E \frac{dy}{|x-y|^{n-1}} \leq \int_{B(x,r_0)} \frac{dy}{|x-y|^{n-1}}.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\int_E \frac{dy}{|x-y|^{n-1}} &= \int_{E \setminus B(x,r_0)} \frac{dy}{|x-y|^{n-1}} + \int_{E \cap B(x,r_0)} \frac{dy}{|x-y|^{n-1}} \\
&\leq \frac{1}{r_0^{n-1}} \int_{E \setminus B(x,r_0)} dy + \int_{E \cap B(x,r_0)} \frac{dy}{|x-y|^{n-1}} \\
&= \frac{1}{r_0^{n-1}} \int_{B(x,r_0) \setminus E} dy + \int_{E \cap B(x,r_0)} \frac{dy}{|x-y|^{n-1}} \\
&\leq \int_{B(x,r_0) \setminus E} \frac{dy}{|x-y|^{n-1}} + \int_{E \cap B(x,r_0)} \frac{dy}{|x-y|^{n-1}} \\
&= \int_{B(x,r_0)} \frac{dy}{|x-y|^{n-1}}
\end{aligned}$$

où on a utilisé que E et $B(x, r_0)$ ont le même volume pour l'égalité de la troisième ligne. On conclut en passant en coordonnées polaires

$$\int_{B(x,r_0)} \frac{dy}{|x-y|^{n-1}} = \int_{B(0,r_0)} \frac{dy}{|y|^{n-1}} = \omega_n r_0.$$

On a donc :

$$\int_E \frac{dy}{|x-y|^{n-1}} = \omega_n r_0 \leq |E|^{1/n} n^{1/n} \omega_n^{1-1/n}.$$

d) En utilisant les résultats précédents, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que $\nabla \bar{u} = (\nabla u) \mathbb{1}_C$, on obtient :

$$\begin{aligned}
|A||D| &\leq c_n \left(\int_{B_1} |\nabla u|^2 \right)^{1/2} \left(\int_C \left(\int_A \frac{dx}{|x-y|^{n-1}} \right)^2 dy \right)^{1/2} \\
&\leq c_n c_0^{1/2} c_n' |A|^{1/n} |C|^{1/2}.
\end{aligned}$$

D'où

$$c_0^{1/2} |C|^{1/2} \geq \frac{1}{c_n c_n'} |A|^{1-1/n} |D|.$$

3. a) D'après le théorème 2.1, puisque v_k est une sous-solution positive de L et $v_k \leq 1$:

$$\int_{B_1} |\nabla v_k|^2 \leq c^2 \int_{B_{3/2}} |v_k|^2 \leq c^2 |B_{3/2}|.$$

b) Dans la suite, les ensembles A, C et D sont définis comme précédemment pour la fonction $w_k = 2\min(v_k, 1/2)$. Appliquons le résultat de la question 2. à la fonction w_k. Ce résultat dit qu'il existe une constante α, qui dépend seulement de c_0 et de la dimension n (en particulier, qui ne dépend pas de k) telle que :

$$|A|\,|D| \leq \alpha |C|^{1/2}.$$

On a utilisé pour simplifier l'inégalité de la question 2. le fait que $|A|^{1/n} \leq |B_1|^{1/n}$ et on a intégré dans la constante le terme $|B_1|^{1/n}$.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrons que $C \subset \{x \in B_1 \text{ tq } v_k(x) > 0, v_{k+1}(x) = 0\}$. Pour tout $x \in B_1$, si $0 < w_k(x) < 1$, alors $0 < v_k(x) < 1/2$ donc $0 < u(x) - (1 - 2^{-k}) < 2^{-k-1}$. On a alors $1 - 2^{-k} < u(x) < 1 - 2^{-(k+1)}$. Donc $v_k(x) > 0$ mais $v_{k+1}(x) = 0$.
Si $v_{k+1}(x) > 0$, alors $u(x) > 1 - 2^{-(k+1)}$ donc $v_k(x) > 1/2$ et $w_k(x) = 1$.
De plus, $|A| \geq \mu$ puisque, si $u = 0$, alors $v_k = 0$.
Ainsi :

$$\begin{aligned}
|\{x \in B_1 \text{ tq } v_k(x) > 0, v_{k+1}(x) = 0\}| &\geq |C| \\
&\geq \frac{1}{\alpha^2}|A|^2|D|^2 \\
&\geq \frac{\mu^2}{\alpha^2}|D|^2 \\
&= \frac{\mu^2}{\alpha^2}|\{x \in B_1 \text{ tq } w_k(x) = 1\}|^2 \\
&\geq \frac{\mu^2}{\alpha^2}|\{x \in B_1 \text{ tq } v_{k+1}(x) > 0\}|^2.
\end{aligned}$$

c) La suite $(|\{x \in B_1 \text{ tq } v_k(x) > 0\}|)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante, à cause de la définition de v_k.
Soit δ quelconque. Soit k_1 qui est tel que :

$$|\{x \in B_1 \text{ tq } v_{k_1}(x) > 0\}| > \delta.$$

D'après la propriété de décroissance et d'après la question précédente, on a, pour tout $k < k_1$:

$$|\{x \in B_1 \text{ tq } v_k(x) > 0, v_{k+1}(x) = 0\}| \geq c\delta^2.$$

Les ensembles $\{x \in B_1 \text{ tq } v_k(x) > 0, v_{k+1}(x) = 0\}$ sont disjoints donc :

$$\begin{aligned}
|B_1| &\geq \sum_{k=0}^{k_0-1} |\{x \in B_1 \text{ tq } v_k(x) > 0, v_{k+1}(x) = 0\}| \\
&\geq ck_1\delta^2.
\end{aligned}$$

Ainsi, $k_1 \leq c^{-1}\delta^{-2}|B_1|$.
Si on prend $k_0 > c^{-1}\delta^{-2}|B_1|$, la propriété voulue est donc vérifiée.
d) Supposons $\delta > 0$ fixé. Nous indiquerons après comment le choisir. Soit k_0 comme à la question précédente.
On a :

$$\int_{B_1} v_{k_0}^2 \leq \delta$$

car $v_{k_0}^2 \leq 1$ donc, par le théorème 2.1 de l'énoncé, pour une certaine constante c indépendante de u et de δ :

$$\sup_{B_{1/2}} v_{k_0} \leq c\delta^{1/2}.$$

Choisissons δ de sorte que $c\delta^{1/2} < 1$. Alors, pour tout $x \in B_{1/2}$:

$$\begin{aligned} & v_{k_0}(x) \leq c\delta^{1/2} \\ \Rightarrow \quad & u(x) \leq 1 - (1 - c\delta^{1/2})2^{-k_0}. \end{aligned}$$

En posant $\eta = 1 - (1 - c\delta^{1/2})2^{-k_0}$, on a le résultat voulu.

4. On commence par prouver le lemme dans le cas où $x_0 = 0$ et $r = 1/2$. À la question précédente, on a montré que si u était une sous-solution de $Lu = 0$, définie sur B_2, telle que $0 \leq u \leq 1$ sur $B_{3/2}$ et $|B_1 \cap u^{-1}(\{0\})| = \mu > 0$, alors $0 \leq u \leq \eta$ sur $B_{1/2}$, avec $\eta < 1$ ne dépendant que de μ, de n, de L. On peut voir de plus que la dépendance en L est uniquement fonction de λ et de $\sup_{i,j} \|a_{ij}\|_\infty$.

Soit u une solution de $Lu = 0$, définie sur B_2.

Par le théorème 2.1, u est bornée sur $B_{3/2}$. Notons $m = \inf_{B_{3/2}} u$ et $M = \sup_{B_{3/2}} u$. Posons $v_+ = \max(0, 2(u-m)/(M-m) - 1)$ et $v_- = \max(0, 1 - 2(u-m)/(M-m))$. Ce sont deux sous-solutions. On a $0 \leq v_+, v_- \leq 1$ sur $B_{3/2}$. De plus, $|\{x \in B_1 \text{ tq } v_+(x) \leq 0\}| + |\{x \in B_1 \text{ tq } v_-(x) \leq 0\}| \geq |B_1|$. On a donc :

$$|\{x \in B_1 \text{ tq } v_+(x) \leq 0\}| \geq |B_1|/2 \quad \text{ou} \quad |\{x \in B_1 \text{ tq } v_-(x) \leq 0\}| \geq |B_1|/2.$$

Supposons par exemple que la première inégalité est vérifiée.

On a alors, d'après le résultat démontré à la question précédente appliqué pour $\mu = |B_1|/2$, $0 \leq v_+ \leq \eta$ sur $B_{1/2}$, avec η ne dépendant que de n et de L. Ainsi, sur $B_{1/2}$:

$$\begin{aligned} m \leq u = (v_+ - v_-)\frac{M-m}{2} + \frac{M+m}{2} \leq \eta\frac{M-m}{2} + \frac{M+m}{2} \\ \Rightarrow \quad \sup_{B_{1/2}} u - \inf_{B_{1/2}} u \leq \sigma(M-m) \end{aligned}$$

si on pose $\sigma = \frac{1+\eta}{2} < 1$.

On a donc démontré le lemme pour $x_0 = 0$ et $r = 1/2$.

Comme σ ne dépend que de la dimension, de λ et de $\sup_{i,j} \|a_{ij}\|_\infty$, le résultat est stable par translation et dilatation (par dilatation, on entend le fait de considérer la fonction $u_\alpha = u(\alpha.)$, pour $\alpha > 0$, qui est une solution de $L_\alpha u_\alpha = 0$ pour $L_\alpha v = \sum_{i,j} \partial_i(a_{ij}(\alpha x)\partial_j v)$). Donc le lemme est vrai pour tous x_0 et r.