Corrigé TD n°9.

Exercice 1

1. Dans cette question, on suppose k fixé. On notera $v = u_{k+1}$ et $\phi = \phi_{k+1}$ pour simplifier.
a) On utilise que v est une sous-solution et on prend $2\phi^2 v$ comme fonction test pour en déduire que

$$2\int_s^t \int (\partial_t v)\phi^2 v + 2\int_s^t \int A\nabla v \cdot \nabla(\phi^2 v) \leq 0.$$

Or

$$2\int_s^t \int (\partial_t v)\phi^2 v = \int_s^t \partial_t \left(\int \phi^2 v^2\right) = \left(\int \phi^2 v^2\right)(t) - \left(\int \phi^2 v^2\right)(s)$$

donc on a

$$\left(\int \phi^2 v^2\right)(t) \leq \left(\int \phi^2 v^2\right)(s) - 2\int_s^t \int A\nabla v \cdot \nabla(\phi^2 v).$$

On va maintenant estimer le terme $-\int A\nabla v \cdot \nabla(\phi^2 v)$. On peut écrire

$$\begin{aligned}
-\int A\nabla v \cdot \nabla(\phi^2 v) &= -\int A(\nabla v)\phi \cdot \nabla(\phi v) - \int A\nabla v \cdot \nabla(\phi)\phi v \\
&= -\int A\nabla(\phi v) \cdot \nabla(\phi v) + \int A\nabla\phi \cdot \nabla(\phi v) v - \int A\nabla(\phi v) \cdot (\nabla\phi) v + \int A(\nabla\phi)\cdot(\nabla\phi) v^2 \\
&= -\int A\nabla(\phi v) \cdot \nabla(\phi v) + \int (A - A^T)\nabla\phi \cdot \nabla(\phi v) v + \int A(\nabla\phi)\cdot(\nabla\phi) v^2 \\
&= I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

On majore le terme I_2 en utilisant les hypothèses sur A de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
|I_2| &\leq 2\Lambda \|\nabla(\phi v)\|_{L^2} \|(\nabla\phi) v\|_{L^2} \\
&\leq \frac{2\Lambda}{\sqrt{\lambda}} \left(\int A\nabla(\phi v)\cdot\nabla(\phi v)\right)^{1/2} \|(\nabla\phi) v\|_{L^2} \\
&\leq \frac{1}{2}\int A\nabla(\phi v)\cdot\nabla(\phi v) + \frac{2\Lambda^2}{\lambda}\int |\nabla\phi|^2 v^2.
\end{aligned}$$

Le terme I_3 est facilement majoré :

$$I_3 \leq \Lambda \int |\nabla\phi|^2 v^2.$$

On en déduit

$$-\int A\nabla v \cdot \nabla(\phi^2 v) \leq -\frac{1}{2}\int A\nabla(\phi v)\cdot\nabla(\phi v) + \frac{C}{2}\int |\nabla\phi|^2 v^2$$

pour une constante $C > 0$ ne dépendant que de λ et Λ. En revenant à l'inégalité de départ, on obtient

$$\left(\int \phi^2 v^2\right)(t) + \lambda \int_s^t \int |\nabla(\phi v)|^2 \leq \left(\int \phi^2 v^2\right)(s) + C\int_s^t \int |\nabla\phi|^2 v^2.$$

b) En utilisant $T_k \leq s \leq T_{k+1} \leq t \leq 0$, on déduit de l'inégalité précédente que

$$\left(\int \phi^2 v^2 \right)(t) + C_1 \int_{T_{k+1}}^{t} \int |\nabla(\phi v)|^2 \leq \left(\int \phi^2 v^2 \right)(s) + C_2 \int_{T_k}^{0} \int |\nabla \phi|^2 v^2.$$

On intègre ensuite en s entre T_{k+1} et T_k des deux côtés de l'inégalité, ce qui nous donne puisque $T_{k+1} - T_k = 2^{-k-2}$:

$$\left(\int \phi^2 v^2 \right)(t) + C_1 \int_{T_{k+1}}^{t} \int |\nabla(\phi v)|^2 \leq 2^{k+2} \int_{T_k}^{T_{k+1}} \int \phi^2 v^2 + C_2 \int_{T_k}^{0} \int |\nabla \phi|^2 v^2.$$

On revient aux notations originelles et on utilise $\phi_{k+1}^2 \leq \mathbb{1}_{\tilde{B}_k}$, $|\nabla \phi_{k+1}|^2 \leq C_0^2 2^{2(k+1)} \mathbb{1}_{\tilde{B}_k}$ et $u_{k+1} \leq u_k$:

$$\begin{aligned}
&\left(\int \phi_{k+1}^2 u_{k+1}^2 \right)(t) + C_1 \int_{T_{k+1}}^{t} \int |\nabla(\phi_{k+1} u_{k+1})|^2 \\
&\leq 2^{k+2} \int_{T_k}^{T_{k+1}} \int \phi_{k+1}^2 u_{k+1}^2 + C_2 \int_{T_k}^{0} \int |\nabla \phi_{k+1}|^2 u_{k+1}^2 \\
&\leq 2^{k+2} \int_{T_k}^{0} \int_{\tilde{B}_k} u_k^2 + C_2 C_0^2 2^{2(k+1)} \int_{T_k}^{0} \int_{\tilde{B}_k} u_k^2 \\
&\leq C^k U_k
\end{aligned}$$

pour une constante $C > 1$. En particulier, on a :

$$\sup_{T_{k+1} \leq t \leq 0} \left(\int \phi_{k+1}^2 u_{k+1}^2 \right)(t) \leq C^k U_k$$

et

$$C_1 \int_{T_{k+1}}^{t} \int |\nabla(\phi_{k+1} u_{k+1})|^2 \leq C^k U_k.$$

Quitte à changer la valeur de la constante C, on obtient le résultat voulu.

2. On a :

$$\begin{aligned}
U_{k+1} &= \int_{\tilde{Q}_{k+1}} |u_{k+1}|^2 = \int_{\tilde{Q}_{k+1}} |u_{k+1}|^2 \mathbb{1}_{u_{k+1} > 0} \\
&= \int_{\tilde{Q}_{k+1}} |u_{k+1}|^2 \mathbb{1}_{u_k > 2^{-(k+2)}}
\end{aligned}$$

Puis en utilisant l'inégalité de Hölder et le résultat admis dans l'énoncé

$$\|\phi_{k+1} u_{k+1}\|_{L^{2(2+n)/n}(\tilde{Q}_{k+1})}^2 \leq C_3 \mathcal{E}_{k+1},$$

on obtient (quitte à changer la valeur de la constante $C > 1$ d'une ligne à l'autre) :

$$\begin{aligned}
U_{k+1} &\leq C \mathcal{E}_{k+1} |\{u_k^2 \mathbb{1}_{\tilde{Q}_{k+1}} > 2^{-2(k+2)}\}|^{\frac{2}{2+n}} \\
&\leq C \mathcal{E}_{k+1} \left(2^{2(k+2)} \int_{\tilde{Q}_{k+1}} |u_k|^2 \right)^{\frac{2}{2+n}} \leq C^k U_k^{1+\frac{2}{2+n}}
\end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité de Markov et la question 1.b) pour conclure.

Exercice 2

1. Si u est de classe $\mathcal{C}^1$, on a, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $\Omega'' + h \subset \Omega$:

$$\begin{aligned}
\forall x \in \Omega'', \qquad \tau_h u(x) - u(x) &= u(x+h) - u(x) \\
&= \int_0^1 \langle \nabla u(x+th), h \rangle \, dt \\
&\leq |h| \int_0^1 |\nabla u(x+th)| dt \\
&\leq |h| \sqrt{\int_0^1 |\nabla u(x+th)|^2 dt}
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité est une conséquence de l'inégalité de Jensen.
D'où :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega''} |\tau_h u(x) - u(x)|^2 dx &\leq |h|^2 \int_0^1 \int_{x \in \Omega''} |\nabla u(x+th)|^2 dx dt \\
&\leq |h|^2 \int_0^1 \int_{x \in \Omega} |\nabla u(x)|^2 dx dt \\
&= |h|^2 \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

On étend à tout $H^1(\Omega)$ par densité.
2. On prend h tel que $\Omega'' + h \subset \Omega$:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \langle (\tau_h A) \nabla(\Delta_h u), \nabla \phi \rangle &= \frac{1}{|h|} \int_\Omega \langle (\tau_h A) \left(\tau_h \nabla u - \nabla u \right), \nabla \phi \rangle \\
&= \frac{1}{|h|} \int_\Omega \langle (\tau_h A) \tau_h \nabla u, \nabla \phi \rangle - \frac{1}{|h|} \int_\Omega \langle (\tau_h A) \nabla u, \nabla \phi \rangle \\
&= \frac{1}{|h|} \int_\Omega \langle A \nabla u, \tau_{-h} \nabla \phi \rangle - \int_\Omega \langle (\Delta_h A) \nabla u, \nabla \phi \rangle - \frac{1}{|h|} \int_\Omega \langle A \nabla u, \nabla \phi \rangle \\
&= \int_\Omega \langle A \nabla u, \nabla \Delta_{-h} \phi \rangle - \int_\Omega \langle (\Delta_h A) \nabla u, \nabla \phi \rangle \\
&= \int_\Omega f(\Delta_{-h} \phi) - \int_\Omega \langle (\Delta_h A) \nabla u, \nabla \phi \rangle \\
&= \int_\Omega (\Delta_h f) \phi - \int_\Omega \langle (\Delta_h A) \nabla u, \nabla \phi \rangle .
\end{aligned}$$

3. Soit γ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ qui vaut 1 sur Ω' et dont le support est inclus dans Ω''.
Posons $\phi = \gamma^2 (\Delta_h u)$.

On a :

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left\langle (\tau_h A)\nabla(\Delta_h u), \nabla(\gamma^2(\Delta_h u))\right\rangle \\
&= \int_\Omega \gamma^2 \left\langle (\tau_h A)\nabla(\Delta_h u), \nabla(\Delta_h u)\right\rangle + 2\int_\Omega \left\langle (\tau_h A)\nabla(\Delta_h u), (\nabla\gamma)\right\rangle \gamma\Delta_h u \\
&\geq \lambda \int_\Omega \gamma^2 |\nabla(\Delta_h u)|^2 + 2\int_\Omega \left\langle (\tau_h A)\nabla(\Delta_h u), (\nabla\gamma)\right\rangle \gamma\Delta_h u.
\end{aligned}$$

En utilisant la question précédente :

$$\begin{aligned}
&\lambda \int_\Omega \gamma^2 |\nabla(\Delta_h u)|^2 \\
&\leq -2\int_\Omega \left\langle (\tau_h A)\nabla(\Delta_h u), (\nabla\gamma)\right\rangle \gamma\Delta_h u + \int_\Omega \gamma^2(\Delta_h f)(\Delta_h u) \\
&\quad - \int_\Omega \gamma^2 \left\langle (\Delta_h A)\nabla u, \nabla\Delta_h u\right\rangle - 2\int_\Omega \left\langle (\Delta_h A)\nabla u, \nabla\gamma\right\rangle \gamma\Delta_h u \\
&\leq 2\|A\|_\infty \|\gamma\nabla(\Delta_h u)\|_2 \|\,|\nabla\gamma|\Delta_h u\|_2 + \int_\Omega f\Delta_{-h}(\gamma^2(\Delta_h u)) \\
&\quad + \|\gamma\nabla(\Delta_h u)\|_2 \|\Delta_h A\|_\infty \|\gamma\nabla u\|_2 + 2\|\Delta_h A\|_\infty \||\nabla u|.|\nabla\gamma|\|_2 \|\gamma\Delta_h u\|_2.
\end{aligned}$$

Puis, en utilisant la question 1.,

$$\begin{aligned}
&\lambda \int_\Omega \gamma^2 ||\nabla(\Delta_h u)||^2 \\
&\leq 2\|A\|_\infty \|\gamma\nabla(\Delta_h u)\|_2 \|\,|\nabla\gamma|\Delta_h u\|_2 + \|f\|_2 \|\nabla(\gamma^2\Delta_h u)\|_2 \\
&\quad + \|\gamma\nabla(\Delta_h u)\|_2 \|\Delta_h A\|_\infty \|\gamma\nabla u\|_2 + 2\|\Delta_h A\|_\infty \||\nabla u|.|\nabla\gamma|\|_2 \|\gamma\Delta_h u\|_2.
\end{aligned}$$

Et enfin,

$$\begin{aligned}
&\lambda \int_\Omega \gamma^2 ||\nabla(\Delta_h u)||^2 \\
&\leq 2\|A\|_\infty \|\gamma\nabla(\Delta_h u)\|_2 \|\,|\nabla\gamma|\Delta_h u\|_2 + \|f\|_2 \left(\|\gamma\|_\infty \|\gamma\nabla(\Delta_h u)\|_2 + 2\|\nabla\gamma\|_\infty \|\gamma\Delta_h u\|_2\right) \\
&\quad + \|\gamma\nabla(\Delta_h u)\|_2 \|\Delta_h A\|_\infty \|\gamma\nabla u\|_2 + 2\|\Delta_h A\|_\infty \||\nabla u|.|\nabla\gamma|\|_2 \|\gamma\Delta_h u\|_2.
\end{aligned}$$

Comme $A \in \mathcal{C}^{0,1}$, $\|\Delta_h A\|_\infty$ est bornée par une constante finie indépendante de h.
On a

$$\|\gamma\Delta_h u\|_2 \leq \|\gamma\|_\infty |h|^{-1} \|\tau_h u - u\|_{L^2(\operatorname{Supp}\gamma)} \leq \|\gamma\|_\infty \|\nabla u\|_{L^2(\Omega'')}.$$

De même,

$$\||\nabla\gamma|\Delta_h u\|_2 \leq \|\nabla\gamma\|_\infty \|\nabla u\|_{L^2(\Omega'')}.$$

Donc, pour des constantes C_1, C_2 indépendantes de h :

$$\begin{aligned}
\lambda \|\gamma\nabla(\Delta_h u)\|_2^2 &\leq C_1 \|\gamma\nabla(\Delta_h u)\|_2 \left(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega'')} + \|f\|_2\right) \\
&\quad + C_2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega'')} \left(\|f\|_2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega'')}\right).
\end{aligned}$$

Pour tout $X \in \mathbb{R}$, si $X^2 \leq aX + b$ avec $a, b \geq 0$, on voit (en résolvant l'équation polynomiale associée) qu'on a $X \leq \sqrt{2b} + a$.
On applique cette inégalité avec :

$$a = C_1 \lambda^{-1} \left(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega'')} + \|f\|_2 \right)$$
$$b = C_2 \lambda^{-1} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega'')} \left(\|f\|_2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega'')} \right) \leq C_2 \lambda^{-1} \left(\|f\|_2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega'')} \right)^2$$

et on obtient :

$$\|\gamma \nabla(\Delta_h u)\|_2 \leq C_3 \left(\|f\|_2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega'')} \right).$$

En élevant au carré et en utilisant l'indication, on a :

$$\begin{aligned}
\|\gamma \nabla(\Delta_h u)\|_2^2 &\leq 2C_3 \left(\|f\|_2^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega'')}^2 \right) \\
&\leq 2C_3 \left(\int_\Omega f^2 + c \int_\Omega (u^2 + f^2) \right) \\
&\leq C \int_\Omega (u^2 + f^2).
\end{aligned}$$

Puisque γ vaut 1 sur Ω' :

$$\int_{\Omega'} \|\nabla \Delta_h u\|^2 \leq \|\gamma \nabla(\Delta_h u)\|_2^2$$

et cela donne le résultat voulu.
4. La fonction u définit une distribution sur Ω' (puisque c'est une fonction L^2, donc localement L^1). Pour tous $i, j \leq n$, montrons que la distribution $\partial_i \partial_j u$ est continue au sens de la norme L^2, avec une norme majorée par :

$$D \left(\int_\Omega u^2 + f^2 \right)^{1/2}.$$

Cela impliquera que $\partial_i \partial_j u$ s'identifie à une fonction de $L^2(\Omega')$, dont la norme vérifie la majoration voulue.
Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega')$ quelconque.

$$\begin{aligned}
(\partial_i \partial_j u).\phi &= \int_{\Omega'} u(\partial_i \partial_j \phi) \\
&= -\int_{\Omega'} (\partial_i u)(\partial_j \phi) \\
&= -\lim_{t \to 0} \int_{\Omega'} (\partial_i u)(\Delta_{te_j} \phi) \\
&= -\lim_{t \to 0} \int_{\Omega'} (\Delta_{-te_j} \partial_i u) \phi \\
&\leq \limsup_{t \to 0} \|\Delta_{-te_j} \partial_i u\|_{L^2(\Omega')} \|\phi\|_2 \\
&\leq \limsup_{t \to 0} \|\nabla \Delta_{-te_j} u\|_{L^2(\Omega')} \|\phi\|_2 \\
&\leq C^{1/2} \left(\int_\Omega u^2 + f^2 \right)^{1/2} \|\phi\|_2.
\end{aligned}$$

(On a noté e_j le j-ième vecteur de la base canonique.)

Exercice 3

1. Pour tout x dans un voisinage de x_0 :

$$u(x) = \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x,r)} u(y)dy = \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(0,r)} u(x+z)dz.$$

On peut dériver sous l'intégrale. On applique ensuite la formule de Green à la fonction $U : \Omega \to \mathbb{R}^n$ telle que $U_i = 0$ si $i \neq j$ et $U_j = u$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) &= \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(0,r)} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x+z)dz \\
&= \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)} \frac{\partial u}{\partial x_j}(y)dy \\
&= \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)} \operatorname{div} U(y)dy \\
&= \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{\partial B(x_0,r)} \langle U(y), \nu(y)\rangle\, dy \\
&= \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{\partial B(x_0,r)} u(y)\nu_j(y)dy.
\end{aligned}$$

2. Appliquons l'égalité précédente à $u - m$ et utilisons la majoration $0 \leq u - m \leq M - m$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0)\right| &\leq \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{\partial B(x_0,r)} |u(y)\nu_j(y)|dy \\
&\leq \frac{M-m}{|B(x_0,r)|}\int_{\partial B(x_0,r)} |\nu_j(y)|dy \\
&\leq \frac{M-m}{\pi r^2} \times \left(r\int_{\partial B(0,1)} |\nu_j(y)|dy\right) \\
&= \frac{M-m}{r} \times \left(\frac{1}{\pi}\int_{\partial B(0,1)} |\nu_j(y)|dy\right).
\end{aligned}$$

3. On applique l'inégalité de la question précédente pour $x_0 = x$, $r < d(x, \partial\Omega)$. On obtient ainsi que chaque composante de $\nabla u(x)$ est majorée par :

$$C_n \frac{M-m}{r}$$

En faisant tendre r vers $d(x, \partial\Omega)$, chaque composante est majorée par :

$$C_n \frac{M-m}{d(x, \partial\Omega)}$$

ce qui entraîne l'inégalité demandée pour $C_n' = \sqrt{n}C_n$.

4. Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de compacts inclus dans Ω telle que :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = \Omega \qquad \text{et} \qquad \forall\, k, \quad K_k \subset \mathring{K}_{k+1}.$$

D'après la question 3., pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(\partial u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée sur K_k. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc uniformément lipschitzienne et uniformément bornée. D'après le théorème d'Ascoli, il existe une extraction $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur K_k.
En procédant par extraction diagonale, on peut supposer que la convergence uniforme a lieu sur K_k pour tout $k \in \mathbb{N}$. On fait cette hypothèse dans la suite.
D'après la question 3., pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\forall\, n, n', \qquad \sup_{x\in K_k} \|\nabla u_{\phi(n)}(x) - \nabla u_{\phi(n')}(x)\| \leq 2C'_n \frac{\sup_{x\in K_{k+1}} |u_{\phi(n)}(x) - u_{\phi(n')}(x)|}{d(K_k, \partial K_{k+1})} \to 0$$

donc $(\nabla u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge également uniformément sur tout K_k.
Chaque dérivée partielle de u_n est harmonique, pour tout n. On peut donc appliquer de nouveau le raisonnement précédent et on montre ainsi que les dérivées secondes de $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent aussi uniformément sur tout compact de Ω.
Si on note u_∞ la limite de $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, on a alors que u_∞ appartient à $\mathcal{C}^2$ et que

$$\Delta u_\infty = \lim_{n\to+\infty} \Delta u_{\phi(n)} = 0.$$