Corrigé Partiel Novembre 2016.

1. a) Commençons par prouver (i). La suite $(\chi u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0 dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Donc pour tout $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$, la suite $\left(\int_{\mathbb{R}^d} \chi u_n \varphi\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée puisque convergente. On définit ensuite la forme linéaire $T_n : L^2(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ par $T_n(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi u_n \varphi$. Le théorème de Banach-Steinhaus implique que $(\|T_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée où $\|T_n\|$ est la norme d'opérateur de l'application T_n. De plus, en utilisant un corollaire du théorème de Hahn-Banach, on a que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|T_n\| = \|\chi u_n\|_{L^2}$. D'où le résultat.
Le point (ii) provient de l'inégalité de Cauchy-Schwarz car on a pour out $\xi \in \mathbb{R}^d$:

$$|\widehat{\chi u_n}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\chi(x)||u_n(x)|\mathbb{1}_{\mathrm{supp}(\chi)} \leq \|\chi u_n\|_{L^2}\|\mathbb{1}_{\mathrm{supp}(\chi)}\|_{L^2} \leq |\mathrm{supp}(\chi)|\,\|\chi u_n\|_{L^2}$$

qui est borné d'après (i).
Finalement, le point (iii) vient du fait que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, on a $\chi e^{-i\langle\cdot,\xi\rangle} \in L^2_{comp}(\Omega)$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant faiblement vers 0 dans $L^2_{loc}(\Omega)$, on a le résultat.
b) D'après la question a), pour tout $R > 0$, on peut utiliser le théorème de convergence dominée pour traiter la première partie correspondant à la région $|\xi| \leq R$ et obtenir :

$$\int_{|\xi|\leq R} |\widehat{\chi u_n}(\xi)|^2 \langle\xi\rangle^{-1}\, d\xi \leq \int_{|\xi|\leq R} |\widehat{\chi u_n}(\xi)|^2\, d\xi \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

D'autre part, en utilisant le théorème de Plancherel,

$$(2\pi)^{-n}\int_{|\xi|>R} |\widehat{\chi u_n}(\xi)|^2 \langle\xi\rangle^{-1}\, d\xi \leq \frac{1}{\langle R\rangle}(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{\chi u_n}(\xi)|^2\, d\xi \leq \frac{1}{\langle R\rangle}\|\chi u_n\|^2_{L^2}.$$

On en déduit :

$$\limsup_{n\to\infty} \|\chi u_n\|_{H^{-1/2}} \leq \frac{1}{R}\limsup_{n\to\infty} \|\chi u_n\|^2_{L^2}$$

ce qui permet de conclure puisque R est arbitraire.
2. a) Le symbole a étant dans S^0, on en déduit que $\mathrm{Op}(a)$ est borné de L^2 dans L^2. On en déduit en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz que :

$$|(\mathrm{Op}(a)(\chi u_n), \chi u_n)| \leq C\|\chi u_n\|^2_{L^2} \quad \text{pour une constante } C > 0.$$

Or la suite (χu_n) est bornée dans L^2 d'après la question 1.a). D'où le résultat.
b) En utilisant le résultat de dualité rappelé dans l'énoncé, on peut écrire :

$$|(\mathrm{Op}(\tau)(\chi u_n), \chi u_n)| \leq \|\mathrm{Op}(\tau)(\chi u_n)\|_{H^{1/2}}\|\chi u_n\|_{H^{-1/2}}.$$

De plus, le symbole τ étant dans S^{-1}, on a $\mathrm{Op}(\tau)$ qui est borné de $H^{-1/2}$ dans $H^{1/2}$ d'où l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$|(\mathrm{Op}(\tau)(\chi u_n), \chi u_n)| \leq C\|\chi u_n\|^2_{H^{-1/2}}$$

ce qui nous permet de conclure en utilisant la question 1.b).

3. Soit $\varepsilon > 0$. On introduit le symbole $\tilde{a} = a + \varepsilon$ qui est encore un symbole de S^0 et qui vérifie de plus $\mathrm{Re}\, \tilde{a}(x, \xi) \geq \varepsilon$ pour tout $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$. On applique l'inégalité de Gårding rappelée dans l'énoncé avec $\tilde{a}$ et on obtient :

$$\mathrm{Re}\,(\mathrm{Op}(a)(\chi u_n), \chi u_n) = \mathrm{Re}\,(\mathrm{Op}(\tilde{a})(\chi u_n), \chi u_n) - \varepsilon \|\chi u_n\|_{L^2}^2 \geq -\varepsilon \|\chi u_n\|_{L^2}^2 - C_\varepsilon \|\chi u_n\|_{H^{-1/2}}^2.$$

En faisant tendre n vers l'infini et en utilisant le résultat de la question 1.b), on obtient :

$$\liminf_{n\to\infty} \mathrm{Re}\,(\mathrm{Op}(a)(\chi u_n), \chi u_n) \geq -\varepsilon \limsup_{n\to\infty} \|\chi u_n\|_{L^2}^2$$

ce qui permet de conclure puisque ε est arbitraire.

4. On a :

$$\mathrm{Im}\,(\mathrm{Op}(a)(\chi u_n), \chi u_n) = \mathrm{Im}\,(\mathrm{Op}(a_0)(\chi u_n), \chi u_n) + \mathrm{Im}\,(\mathrm{Op}(a_1)(\chi u_n), \chi u_n).$$

D'après la question 2.b), on sait que

$$(\mathrm{Op}(a_1)(\chi u_n), \chi u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{et donc} \quad \mathrm{Im}\,(\mathrm{Op}(a_1)(\chi u_n), \chi u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Pour le premier terme, on écrit :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\,(\mathrm{Op}(a_0)(\chi u_n), \chi u_n) &= \frac{1}{2i}((\mathrm{Op}(a_0)(\chi u_n), \chi u_n) - \overline{(\mathrm{Op}(a_0)(\chi u_n), \chi u_n)}) \\
&= \frac{1}{2i}((\mathrm{Op}(a_0)(\chi u_n), \chi u_n) - (\mathrm{Op}(a_0)^*(\chi u_n), \chi u_n)) \\
&= \frac{1}{2i}((\mathrm{Op}(a_0 - a_0^*)(\chi u_n), \chi u_n).
\end{aligned}$$

De plus, comme a_0 est réel et est dans S^0, le symbole $a_0 - a_0^*$ est dans S^{-1}, ce qui permet d'utiliser à nouveau la question 2.b) pour obtenir $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Op}(a_0)(\chi u_n), \chi u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

5. On introduit χ' et B comme suggéré dans l'énoncé. On note b le symbole de B. Alors on

$$\mathrm{Re}\, b = M^2 \chi^2 - \chi \mathrm{Re}\,(a^* \# a) \chi.$$

Or $\mathrm{Re}\,(a^* \# a) \leq |a^* \# a| \leq |a|^2 \leq M^2$. Donc $\mathrm{Re}\, b \geq 0$. De plus, le premier terme du développement en somme asymptotique de $a^* \# a$ est $\bar{a} a$ et est donc réel et dans S^0. On peut donc écrire $b = b_0 + b_{-1}$ avec b_0 réel, $b_0 \in S^0$ et $b_{-1} \in S^{-1}$. On peut ainsi appliquer les questions 3. et 4. à l'opérateur B, on obtient :

$$\liminf_{n\to\infty} \mathrm{Re}\,(B(\chi' u_n), \chi' u_n) \geq 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\,(B(\chi' u_n), \chi' u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

On écrit ensuite

$$\|\mathrm{Op}(a)(\chi u_n)\|_{L^2}^2 = (\chi\, \mathrm{Op}(a)^* \,\mathrm{Op}(a) \chi \chi' u_n, \chi' u_n) = -(B \chi' u_n, \chi' u_n) + (M^2 \chi^2 \chi' u_n, \chi' u_n).$$

On trouve alors

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \|\mathrm{Op}(a)(\chi u_n)\|_{L^2}^2 &\leq -\liminf_{n\to\infty} \mathrm{Re}\,(B \chi' u_n, \chi' u_n) + \limsup_{n\to\infty} (M^2 \chi^2 \chi' u_n, \chi' u_n) \\
&\leq M^2 C(\chi)^2.
\end{aligned}$$

6. Soit (a_j) une suite dénombrable de $\mathcal{C}_K^\infty(\Omega \times S^{d-1})$ telle que $\mathrm{Vect}(a_j, j \in \mathbb{N})$ soit dense dans $\mathcal{C}_K^\infty(\Omega \times S^{d-1})$. À une fonction a de $\mathcal{C}_K^\infty(\Omega \times S^{d-1})$, on peut associer un symbole $\widetilde{a} \in S_K^0(\mathbb{R}^d)$ tel que $\max_{K\times\mathbb{R}^d} |\widetilde{a}| = \max_{K\times S^{d-1}} |a|$ et on note $\widetilde{a} = a$ le prolongement ainsi défini. On remarque que les résultats obtenus aux questions précédentes ne dépendent pas du comportement de a proche de 0 car si $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ vaut 1 dans un voisinage de 0, $a(x,\xi) = \psi(\xi)a(x,\xi) + (1-\psi(\xi))a(x,\xi)$ et $\psi(\xi)a(x,\xi) \in S^{-\infty}$. On fixe $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ valant 1 sur K. Par un procédé diagonal de Cantor, on construit une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ telle que pour tout $j \in \mathbb{N}$, la suite $(\mathrm{Op}(a_j)(\chi u_{\varphi(n)}), \chi u_{\varphi_1(n)})$ converge. Ainsi, si $a \in \mathrm{Vect}(a_j, j \in \mathbb{N})$, la suite $(\mathrm{Op}(a)(\chi u_{\varphi(n)}), \chi u_{\varphi(n)})$ converge. On note $\Lambda_{K,\chi}(a)$ cette limite. D'après la question précédente, on a :

$$|\Lambda_{K,\chi}(a)| \leq \|a\|_\infty C(\chi)^2, \quad a \in \mathrm{Vect}(a_j, j \in \mathbb{N}).$$

Par densité de $\mathrm{Vect}(a_j, j \in \mathbb{N})$ dans $C_K^\infty(\Omega \times S^{d-1})$, on étend la forme linéaire $\Lambda_{K,\chi}$ à $\mathcal{C}_K^\infty(\Omega \times S^{d-1})$ avec

$$|\Lambda_{K,\chi}(a)| \leq \|a\|_\infty C(\chi)^2, \quad a \in \mathcal{C}_K^\infty(\Omega \times S^{d-1}).$$

Finalement, si $a \in S_K^0(\mathbb{R}^d)$, on définit $\Lambda_{K,\chi}(a)$ par $\Lambda_{K,\chi}(a_{|\Omega\times S^{d-1}})$.

7. Si $\mathrm{supp}(a) \subset K \times \mathbb{R}^{d-1}$ et si $\tilde{\chi}$ et χ sont égales 1 sur K, alors on a :

$$\begin{aligned}(\mathrm{Op}(a)(\tilde{\chi}u_n), \tilde{\chi}u_n) - (\mathrm{Op}(a)(\chi u_n), \chi u_n) &= (\mathrm{Op}(a)(\tilde{\chi}u_n), \chi u_n) - (\mathrm{Op}(a)(\chi u_n), \chi u_n)\\ &= (\mathrm{Op}(a)((\tilde{\chi}-\chi)u_n), \chi u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

En effet, si $\chi' \in \mathcal{C}_0^\infty$ est égale à 1 sur les supports de χ et $\tilde{\chi}$, alors

$$(\mathrm{Op}(a)((\tilde{\chi}-\chi)u_n), \chi u_n) = (\chi\,\mathrm{Op}(a)(\tilde{\chi}-\chi)\chi' u_n, \chi' u_n).$$

De plus, $(\tilde{\chi}-\chi)$ est nulle sur K donc $\chi\,\mathrm{Op}(a)(\tilde{\chi}-\chi) \in \mathrm{Op}(S^{-1})$ (le premier terme du développement en somme asymptotique est nul). Donc d'après la question 2.b), on a la limite recherchée.

Désormais, on ne notera plus la dépendance en χ et on notera simplement Λ_K plutôt que $\Lambda_{K,\chi}$.

8. Soit $\chi' \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ telle que $\chi' = 1$ sur $\mathrm{supp}(\chi)$. On note Λ l'opérateur de symbole $\langle\xi\rangle$. On remarque comme P est différentiel, on a $\chi P \chi' = \chi P$. On en déduit :

$$\|\chi P u_n\|_{H^{-m}} = \|\Lambda^{-m}\chi P u_n\|_{L^2} = \|\Lambda^{-m}\chi P \chi' u_n\|_{L^2} = (P^*\chi\Lambda^{-2m}\chi P \chi' u_n, \chi' u_n).$$

L'opérateur $P^*\chi\Lambda^{-2m}\chi P$ est de symbole principal $|p_m|^2\chi^2|\xi|^{-2m} \in S^0$. En utilisant que μ est la mesure microlocale de défaut de u_n et en utilisant que $\|\chi P u_n\|_{H^{-m}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, on obtient :

$$\int_{\Omega\times S^{d-1}} |p_m|^2\chi^2|\xi|^{-2m}\, d\mu = 0.$$

Ceci étant valable pour tout $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ et la mesure $|p_m|^2\mu$ étant positive sur $\Omega \times S^{d-1}$, on trouve que c'est la mesure nulle. Ceci permet de conclure.

9. Soit $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ telle que $\chi a = a$ et $\chi' \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ telle que $\chi' = 1$ sur $\mathrm{supp}(\chi)$. L'opérateur $[\mathrm{Op}(a), P]$ a pour symbole principal $i\{a, p_m\} \in S^0$. On peut écrire :

$$\int_{\Omega\times S^{d-1}} \{a, p_m\}(x,\xi)\, d\mu(x,\xi) = \frac{1}{i}\lim_{n\to\infty}([\mathrm{Op}(a), P](\chi' u_n), \chi' u_n).$$

En utilisant le fait que $P^* = P$, on a :

$$\begin{aligned}([\mathrm{Op}(a), P](\chi' u_n), \chi' u_n) &= (\mathrm{Op}(a)P(\chi' u_n), \chi' u_n) - (P\,\mathrm{Op}(a)(\chi' u_n), \chi' u_n)\\ &= (\mathrm{Op}(a)P(\chi' u_n), \chi' u_n) - (\mathrm{Op}(a)(\chi' u_n), P\chi' u_n)\\ &= (\mathrm{Op}(a)P(\chi' u_n), \chi' u_n) - (\chi\,\mathrm{Op}(a)(\chi' u_n), P\chi' u_n)\\ &= (\mathrm{Op}(a)P(\chi' u_n), \chi' u_n) - (\mathrm{Op}(a)(\chi' u_n), \chi P\chi' u_n).\end{aligned}$$

Regardons le deuxième terme. Comme remarqué précédemment, P est différentiel donc $\chi P\chi' = \chi P$ donc $\chi P\chi' u_n = \chi P u_n$ converge fortement vers 0 dans $H^{1-m}(\mathbb{R}^d)$. On a aussi $\mathrm{Op}(a)$ qui est borné de L^2 dans H^{m-1} donc $\mathrm{Op}(a)(\chi' u_n)$ est borné dans H^{m-1} puisque $\chi' u_n$ est bornée dans L^2. Ainsi,

$$(\mathrm{Op}(a)(\chi' u_n), \chi P\chi' u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

On coupe maintenant le premier terme en deux :

$$(\mathrm{Op}(a)P(\chi' u_n), \chi' u_n) = (\mathrm{Op}(a)(1-\chi)P(\chi' u_n), \chi' u_n) + (\mathrm{Op}(a)\chi P(\chi' u_n), \chi' u_n).$$

On remarque que $\mathrm{Op}(a)(1-\chi) \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$ car tous les termes de son développement en somme asymptotique sont nuls. En effet, le premier est nul car $a\chi = a$ et les suivants le sont car $(\partial_\xi^\alpha a)(\partial_x^\alpha \chi) = \partial_\xi^\alpha(a\partial_x^\alpha \chi)$ et χ valant 1 sur le support de a en x, dès que $\alpha \neq 0$, $\partial_x^\alpha \chi$ est nul sur le support de a en x. Ainsi, en utilisant la question 1.b), on a

$$(\mathrm{Op}(a)(1-\chi)P(\chi' u_n), \chi' u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Enfin, toujours en utilisant que $\chi P\chi' = \chi P$, $\chi P\chi' u_n = \chi P u_n$ converge fortement vers 0 dans H^{1-m} puis $\mathrm{Op}(a)\chi P(\chi' u_n)$ converge fortement vers 0 dans L^2. D'où

$$(\mathrm{Op}(a)\chi P(\chi' u_n), \chi' u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

et ceci conclut la preuve.

10. On prend une suite exhaustive de compacts (K_j) de Ω. En appliquant un procédé diagonal de Cantor, on peut construire une sous-suite $u_{\theta(n)}$ telle que pour tout K_j, Λ_{K_j} est bien définie.
Si $a \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \times S^{d-1})$, et $\mathrm{supp}(a) \subset K \times S^{d-1}$ avec K compact de Ω et $K \subset K_{j_0}$ pour un certain j_0, pour $\chi = 1$ sur K et $\chi_{j_0} = 1$ sur K_{j_0}, on a

$$\lim_{n\to\infty} (\mathrm{Op}(a)(\chi u_{\theta(n)}), \chi u_{\theta(n)}) = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{Op}(a)(\chi_{j_0} u_{\theta(n)}), \chi_{j_0} u_{\theta(n)}) = \Lambda_{K_{j_0}}(a)$$

avec

$$|\Lambda_{K_{j_0}}(a)| \leq \|a\|_\infty C(\chi_{j_0})^2.$$

On pose $\Lambda(a) = \Lambda_{K_{j_0}}(a)$ et Λ est bien une mesure de Radon positive sur $\Omega \times S^{d-1}$.