Analyse des EDP

Partiel Novembre 2016

Mesures microlocales de défaut (d'après P. Gérard)

$* * *$ Notations $* * *$

On considère des fonctions à valeurs complexes définies sur un ouvert quelconque Ω de $\mathbb{R}^d$ avec $d \geqslant 1$. Précisément, nous considérons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $L^2_{loc}(\Omega)$ (u_n appartient à $L^2(K)$ pour tout compact $K \subset \Omega$) qui converge faiblement vers 0 au sens où :

$$\forall \varphi \in L^2_{comp}(\Omega), \qquad \int_\Omega u_n(x)\varphi(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

où nous avons noté $L^2_{comp}(\Omega)$ l'espace des fonctions $\varphi \in L^2(\Omega)$ à support compact dans Ω. Le but de ce problème est de caractériser le défaut de convergence forte grâce aux opérateurs pseudo-différentiels.

Dans tout le problème χ désigne une fonction à valeurs réelles telle que $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$. Si $u \in L^2_{loc}(\Omega)$, alors $\chi u \in L^2(\Omega)$ et on peut étendre χu par 0 sur $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ pour obtenir une fonction appartenant à $L^2(\mathbb{R}^n)$. On notera toujours cette fonction χu. Cela nous permet de définir la transformée de Fourier de χu, notée $\widehat{\chi u}$, ainsi que $\mathrm{Op}(a)(\chi u)$ pour tout symbole $a \in S^m(\mathbb{R}^n)$ (où m est un nombre réel quelconque).

Etant donné $s \in \mathbb{R}$, on note $H^s(\mathbb{R}^d)$ l'espace de Sobolev d'ordre s et $\langle D_x\rangle^s$ l'opérateur pseudo-différentiel de symbole $\langle\xi\rangle^s = (1+|\xi|^2)^{s/2}$. On note (u,v) le produit scalaire sur $L^2(\mathbb{R}^d)$, défini par $(u,v) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x)\overline{v(x)}\,dx$. On pensera à utiliser :
– l'inégalité de Cauchy-Schwarz ;
– le fait que $\|u\|_{H^s} = \|\langle D_x\rangle^s u\|_{L^2}$ par définition de la norme $\|\cdot\|_{H^s}$;
– la dualité : pour tout $s \geqslant 0$, $(u,v) \in H^s(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d) \;\Rightarrow\; |(u,v)| \leq \|u\|_{H^s}\|v\|_{H^{-s}}$.

$* * *$ Problème $* * *$

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge faiblement vers 0 dans $L^2_{loc}(\Omega)$.

a. Soit $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$. Montrer que : (i) la suite (χu_n) est bornée dans $L^2(\mathbb{R}^n)$; (ii) la suite $(\widehat{\chi u_n})$ est bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et (iii) pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{n\to+\infty} \widehat{\chi u_n}(\xi) = 0$.

b. Soit $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$. Montrer que $\|\chi u_n\|_{H^{-1/2}(\mathbb{R}^d)}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Indication : écrire

$$\|\chi u_n\|^2_{H^{-1/2}(\mathbb{R}^d)} = \int_{|\xi|\leq R} (1+|\xi|^2)^{-\frac{1}{2}} \left|\widehat{\chi u_n}(\xi)\right|^2 d\xi + \int_{|\xi|\geqslant R} (1+|\xi|^2)^{-\frac{1}{2}} \left|\widehat{\chi u_n}(\xi)\right|^2 d\xi,$$

où R est un grand paramètre.

2. Soit $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge faiblement vers 0 dans $L^2_{loc}(\Omega)$.

a. Montrer que, pour tout symbole $a \in S^0(\mathbb{R}^d)$, la suite $(\mathrm{Op}(a)(\chi u_n), \chi u_n)$ est bornée dans $\mathbb{C}$.

b. Montrer que, pour tout symbole $\tau \in S^{-1}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$(\mathrm{Op}(\tau)(\chi u_n), \chi u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Rappel [Inégalité de Gårding]**.** Soit $\varepsilon > 0$. Considérons un symbole $a \in S^0(\mathbb{R}^d)$ tel que $\operatorname{Re} a(x,\xi) \geqslant \varepsilon$ pour tout (x,ξ) dans $\mathbb{R}^{2n}$. Nous avons vu en cours l'inégalité de Gårding qui énonce qu'il existe deux constantes positives c_ε et C_ε telles que pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\mathrm{Re}(\mathrm{Op}(a)u, u) \geqslant c_\varepsilon \left\|u\right\|^2_{L^2} - C_\varepsilon \left\|u\right\|^2_{H^{-1/2}}.$$

En particulier on a $\mathrm{Re}(\mathrm{Op}(a)u, u) \geqslant -C_\varepsilon \left\|u\right\|^2_{H^{-1/2}}$.

3. Soit $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge faiblement vers 0 dans $L^2_{loc}(\Omega)$. Considérons un symbole $a \in S^0(\mathbb{R}^d)$ tel que $\operatorname{Re} a(x,\xi) \geqslant 0$ pour tout (x,ξ) dans $\mathbb{R}^{2n}$. Montrer que

$$\liminf_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(\mathrm{Op}(a)(\chi u_n), \chi u_n) \geqslant 0.$$

4. Soit $a \in S^0(\mathbb{R}^d)$. On suppose que a peut s'écrire sous la forme $a = a_0 + a_{-1}$ où a_{-1} appartient à $S^{-1}(\mathbb{R}^n)$ et $a_0 \in S^0(\mathbb{R}^d)$ vérifie $\operatorname{Im} a_0 = 0$. Montrer que

$$\mathrm{Im}(\mathrm{Op}(a)(\chi u_n), \chi u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

5. Soit $a \in S^0(\mathbb{R}^d)$. On pose $M = \sup_{(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}} |a(x,\xi)|$. Montrer que

$$\limsup_{n\to+\infty} \left\|\mathrm{Op}(a)(\chi u_n)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq M C(\chi) \quad \text{où} \quad C(\chi) = \limsup_{n\to+\infty} \left\|\chi u_n\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Indication : on pourra introduire une fonction $\chi' \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que $\chi'\chi = \chi$ ainsi que l'opérateur B défini par $Bv = M^2\chi^2 v - \chi\,\mathrm{Op}(a)^*\,\mathrm{Op}(a)(\chi v)$.

6. $(*)$ Considérons un compact $K \subset \Omega$. Introduisons :
– l'ensemble $C^0_K(\Omega)$ des fonctions continues à support contenu dans K ;
– l'ensemble $C^\infty_K(\Omega \times S^{d-1})$ des fonctions C^∞ sur $\Omega \times S^{d-1}$ et à support dans $K \times S^{d-1}$;
– l'espace $S^0_K(\mathbb{R}^d)$ des symboles $a \in S^0(\mathbb{R}^d)$ qui sont tels que $a(x,\xi)$ est homogène en ξ d'ordre 0 pour $|\xi| \geqslant 1/2$ et de plus $\operatorname{supp} a \subset K \times \mathbb{R}^d$.

On admet que $C^\infty_K(\Omega \times S^{d-1})$ est séparable (i.e. il existe une partie dénombrable dense).

En déduire qu'il existe une forme linéaire continue $\Lambda_{K,\chi}\colon S^0_K(\Omega) \to \mathbb{C}$ telle que, pour tout $a \in S^0_K(\mathbb{R}^n)$,

$$(\mathrm{Op}(a)(\chi u_n), \chi u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Lambda_{K,\chi}(a).$$

7. Montrer que $\Lambda_{K,\chi}$ ne dépend pas de χ.

A partir de ce qui précède, on pourrait démontrer le résultat suivant (qui est admis, il n'est pas demandé de le démontrer).

Théorème 1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge faiblement vers 0 dans $L^2_{loc}(\Omega)$. Il existe une sous-suite $(u_{\theta(n)})$ et une mesure de Radon μ positive sur $\Omega\times S^{d-1}$ telles que le résultat suivant est vrai : si $a \in S^0(\mathbb{R}^d)$ et $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ vérifient :*
– a est homogène en ξ d'ordre 0 pour $|\xi| \geqslant 1/2$,
– pour certain compact $K \subset \Omega$ on a $\operatorname{supp} a \subset K \times \mathbb{R}^d$ et $\chi = 1$ sur K,
alors

$$(\mathrm{Op}(a)(\chi u_{\theta(n)}), \chi u_{\theta(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\Omega\times S^{d-1}} a(x,\xi)\, d\mu(x,\xi). \tag{1}$$

Définition 2. *On dit que μ est la mesure microlocale de défaut de $(u_{\theta(n)})$.*

8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge faiblement vers 0 dans $L^2_{loc}(\Omega)$ et admettant une mesure microlocale de défaut μ. Considérons un opérateur différentiel d'ordre m, $P = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\partial_x^\alpha$ avec $a_\alpha \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. On note $p_m = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)(i\xi)^\alpha$ le symbole principal de P. Supposons que, pour tout $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$, la suite $\chi P(u_n)$ converge fortement vers 0 dans $H^{-m}(\mathbb{R}^d)$. En déduire que

$$\operatorname{supp} \mu \subset \big\{(x,\xi) \in \Omega \times S^{d-1}\,;\, p_m(x,\xi) = 0\big\}.$$

Indication : écrire $\|\chi P u_n\|^2_{H^{-m}(\mathbb{R}^n)}$ sous la forme $(\mathrm{Op}(a)(\chi' u_n), \chi' u_n)$.

9. $(*)$ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge faiblement vers 0 dans $L^2_{loc}(\Omega)$ et admettant une mesure microlocale de défaut μ. Considérons un opérateur différentiel d'ordre m, $P = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\partial_x^\alpha$ avec $a_\alpha \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. On suppose de plus que $P^* = P$ et que, pour tout $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$, la suite $\chi P(u_n)$ converge vers 0 fortement dans $H^{1-m}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que, pour toute fonction $a \in C^\infty(\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}))$ homogène d'ordre $1-m$ en ξ pour $|\xi| \geqslant 1/2$ et à support compact en x, on a

$$\int_{\Omega\times S^{d-1}} \{a, p_m\}(x,\xi)\, d\mu(x,\xi) = 0.$$

Indication : introduire χ telle que $\chi a = a$.

10. Démontrer le théorème 1.