TD n°1. Distributions et espaces de Sobolev

Distributions et distributions tempérées

Exercice 1 : distributions

Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on appelle *semi-norme* une fonction $p : E \to \mathbb{R}^+$ telle que :

$$\forall\, x, y \in E, \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y) \qquad \text{et} \qquad \forall\, x \in E, \forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad p(\lambda x) = |\lambda| p(x).$$

1. [Topologie définie par une famille de semi-normes]
a) Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\{p_i\}_{i\in I}$ une famille de semi-normes sur E. On note $\mathcal{U}$ l'ensemble des parties U de E telles que, pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ et $i_1, ..., i_n$ un nombre fini d'éléments de I vérifiant :

$$\{x' \in E \text{ tq } \forall\, k,\, p_{i_k}(x - x') < r\} \subset U.$$

Montrer que $\mathcal{U}$ est une topologie. C'est la *topologie définie par la famille de semi-normes* $\{p_i\}_{i\in I}$.
b) Montrer que, pour cette topologie, les applications suivantes sont continues :

$$(x, y) \in E \times E \mapsto x + y \qquad \text{et} \qquad (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E \mapsto \lambda x.$$

On dit que E est un *espace vectoriel topologique.*
c) On suppose que, pour tout $x \in E - \{0\}$, il existe $i \in I$ tel que $p_i(x) \neq 0$. Montrer que la topologie de la question a) est séparée.
d) Soit q une semi-norme sur E. Montrer que q est continue pour la topologie définie par $\{p_i\}_{i\in I}$ si et seulement s'il existe $C > 0$ et $i_1, ..., i_n \in I$ vérifiant :

$$q \leq C \sup_{1\leq k\leq n} p_{i_k}.$$

e) Montrer qu'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E converge vers une limite x_∞ si et seulement si $p(x_k - x) \to 0$ pour toute semi-norme continue p.
2. Si K est un compact de $\mathbb{R}^n$ (pour un certain $n \geq 1$), on note $\mathcal{D}_K$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, à support compact inclus dans K.
Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on définit une semi-norme $p_{m,K}$ par :

$$\forall\, f \in \mathcal{D}_K, \qquad p_{m,K}(f) = \sup_{x\in K, |\alpha|\leq m} |\partial^\alpha f(x)|.$$

On munit $\mathcal{D}_K$ de la topologie engendrée par la famille de semi-normes $\{p_{m,K}\}_{m\in\mathbb{N}}$.
On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, à support compact.
Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on pose $K_i = [-i; i]^n$. On note :

$$\mathcal{P} = \{p \text{ semi-norme sur } \mathcal{D} \text{ tq } \forall\, i \in \mathbb{N}^*,\, p_{|\mathcal{D}_{K_i}} \text{ est continue}\}.$$

On munit $\mathcal{D}$ de la topologie engendrée par la famille de semi-normes $\mathcal{P}$.
a) Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille d'éléments de $\mathcal{D}$. Montrer que cette suite converge dans $\mathcal{D}$ vers une limite f_∞ si et seulement s'il existe $i \in \mathbb{N}^*$ vérifiant :

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\},\, f_k \in \mathcal{D}_{K_i} \qquad \text{et} \qquad f_k \to f_\infty \text{ dans } \mathcal{D}_{K_i}.$$

b) Montrer que la topologie de $\mathcal{D}$ n'est pas métrisable.

3. Une *distribution* est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}$. On note $\mathcal{D}'$ l'espace des distributions. Montrer qu'une forme linéaire $T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est une distribution si et seulement si, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$, il existe $C > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall\, f \in \mathcal{D} \text{ tq } \mathrm{Supp}(f) \subset K, \qquad |T(f)| \leq C p_{m,K}(f).$$

Exercice 2 : espace de Schwartz et distributions tempérées

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On appelle espace de Schwartz l'ensemble suivant :

$$\mathcal{S} = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \text{ tq } \forall\, k \in \mathbb{N},\, \alpha \in \mathbb{N}^d,\, \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + ||x||^k)|\partial^\alpha f(x)| < +\infty \right\}.$$

Pour tous $k, m \in \mathbb{N}$, on définit une semi-norme $p_{k,m}$ sur $\mathcal{S}$ par :

$$p_{k,m}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, |\alpha| \leq m} (1 + ||x||^k)|\partial^\alpha f(x)|$$

et on munit $\mathcal{S}$ de la topologie engendrée par la famille de semi-normes $\{p_{k,m}\}_{k,m \in \mathbb{N}}$. On note $\mathcal{S}'$ l'ensemble des *distributions tempérées*, c'est-à-dire des formes linéaires continues sur $\mathcal{S}$.

1. a) Montrer qu'une forme linéaire $T : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ est une distribution tempérée si et seulement s'il existe $C > 0$ et $k, m \in \mathbb{N}$ vérifiant :

$$\forall\, f \in \mathcal{S}, \qquad |T(f)| \leq C p_{m,k}(f).$$

b) Donner un exemple de distribution $T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ qui ne se prolonge pas en une distribution tempérée $\tilde{T} : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$.

2. On définit la transformée de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{S}$ par :

$$\forall\, \xi \in \mathbb{R}^n, \qquad \mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi.x} f(x) dx.$$

On rappelle que la transformée de Fourier d'une fonction de Schwartz est toujours de Schwartz.

a) Pour toute distribution tempérée $T \in \mathcal{S}'$, on définit $\mathcal{F}T : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ par :

$$\mathcal{F}T(f) = T(\mathcal{F}(f)).$$

Montrer que $\mathcal{F}T$ est une distribution tempérée.

b) Quelle est la transformée de Fourier du dirac en 0 (c'est-à-dire de la distribution $f \mapsto f(0)$) ?

c) Si g appartient à $\mathcal{S}$, quelle est la transformée de Fourier de $T_g : f \mapsto \int_{\mathbb{R}} fg$?

Espaces de Sobolev

Dans toute la suite, on suppose qu'un entier $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Pour tous $k \in \mathbb{N}$, $p \in [1; \infty]$, on définit l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ par :

$$W^{k,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) \text{ tq } \forall\, |\alpha| \leq k,\, f^{(\alpha)} \in L^p(\Omega)\}.$$

Dans la définition qui précède, il faut comprendre les dérivées au sens des distributions : $f^{(\alpha)}$ est la dérivée α-ième de la distribution $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \mapsto \int_\Omega f\phi$.

Si le contexte n'est pas ambigu, on pourra noter plus simplement $W^{k,p}$ au lieu de $W^{k,p}(\Omega)$ de même que L^p au lieu de $L^p(\Omega)$.
L'espace $W^{k,p}(\Omega)$ est un espace de Banach si on le munit de la norme suivante :

$$\begin{aligned} ||f||_{k,p} &= \left(\sum_{|\alpha|\leq k} ||f^{(\alpha)}||_p^p \right)^{1/p} \qquad \text{si } p < +\infty \\ &= \sup_{|\alpha|\leq k} ||f^{(\alpha)}||_\infty \qquad \text{sinon} \end{aligned}$$

où l'on a noté $\|\cdot\|_p$ la norme $\|\cdot\|_{L^p}$. Au cours du TD, on utilisera indifféremment les notations $\|\cdot\|_{k,p}$ (resp. $\|\cdot\|_p$) et $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$ (resp. $\|\cdot\|_{L^p}$). Enfin, pour $p = 2$, $W^{k,p}$, qu'on notera alors plus simplement H^k, est un espace de Hilbert, dont le produit scalaire est donné par :

$$\langle f, g \rangle = \sum_{|\alpha|\leq k} \left\langle f^{(\alpha)}, g^{(\alpha)} \right\rangle .$$

Exercice 3 : approximation par des fonctions lisses
Soit $\chi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ une fonction lisse telle que :

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in B(0,1) \\ 0 \text{ si } x \in \mathbb{R}^n - B(0,2). \end{cases}$$

On définit pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\chi_k : x \in \mathbb{R}^n \to \chi(2^{-k}x) \qquad \text{et} \qquad \eta_k : x \in \mathbb{R}^n \to \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi(2^k u) du \right)^{-1} \chi(2^k x).$$

Par des arguments de théorie de la mesure, on peut vérifier que, pour toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, avec $1 \leq p < +\infty$, $||f - f \star \eta_k||_p \to 0$ quand $k \to +\infty$.
1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soient $s \in \mathbb{N}$ et $p \in [1; +\infty[$.
Soit $f \in W^{s,p}(\Omega)$. On note $\underline{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction qui coïncide avec f sur Ω et vaut 0 sur $\mathbb{R}^n - \Omega$. Pour tout k, on pose $f_k = \chi_k(\underline{f} \star \eta_k)$. Montrer que $f_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.
2. Soit $\omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert tel que $\overline{\omega}$ est compact et inclus dans Ω. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq s$, exprimer $f_k^{(\alpha)}$ en fonction de $f^{(\alpha)}$, sur ω, pour k assez grand.
3. En déduire que, pour tous ω et α comme dans la question précédente, $f_{k|\omega}^{(\alpha)}$ converge vers $f_{|\omega}^{(\alpha)}$ dans $L^p(\omega)$.

Exercice 4 : prolongement
Soit $p \in [1; +\infty]$. Soit $\Omega = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tq } x_1 > 0\}$.
1. a) Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$. On définit :

$$u_*(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} u(x_1, x_2, ..., x_n) & \text{si } x_1 > 0 \\ 0 & \text{si } x_1 = 0 \\ u(-x_1, x_2, ..., x_n) & \text{si } x_1 < 0\,. \end{cases}$$

Montrer que $u_* \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Calculer $||u_*||_p$ et, pour tout i, $||\partial_i u_*||_p$ en fonction de $||u||_p$ et des $||\partial_i u||_p$.
b) En déduire qu'il existe une application continue $E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ telle que, pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $E(u)$ et u coïncident sur Ω.
2. Montrer que le résultat de la question précédente reste vrai si on remplace $W^{1,p}$ par $W^{2,p}$.
[Indication : on posera

$$u_{2,*}(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} u(x_1, x_2, ..., x_n) & \text{si } x_1 > 0 \\ 0 & \text{si } x_1 = 0 \\ -3u(-x_1, x_2, ..., x_n) + 4u(-\frac{1}{2}x_1, x_2, ..., x_n) & \text{si } x_1 < 0\,. \end{cases} \quad]$$

De façon plus générale, le résultat reste vrai si on remplace $W^{1,p}$ par $W^{k,p}$, pour un entier $k \in \mathbb{N}^*$ quelconque. En perfectionnant le raisonnement, on peut également démontrer le théorème suivant, que nous admettrons :

Théorème. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de bord régulier. Alors, pour tout $p \in [1; +\infty]$ et tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une application continue $E : W^{k,p}(\Omega) \to W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ telle que, pour toute $u \in W^{k,p}(\Omega)$, u et Eu coïncident sur Ω.*

3. a) En combinant ce théorème avec le résultat de l'exercice précédent, démontrer que si Ω est borné et si $p < +\infty$, alors, pour toute $f \in W^{k,p}(\Omega)$, il existe une suite $(f_l)_{l\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $f_l \to f$ dans $W^{k,p}(\Omega)$.
b) Montrer que le résultat précédent est aussi vrai si Ω n'est pas borné.

Exercice 5 : inégalité de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev

Dans cet exercice, on suppose $n \neq 1$.
1. Soient $f_1, ..., f_n \in L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$. Pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose :

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n).$$

Montrer que $||f||_1 \leq \prod_{i=1}^n ||f_i||_{n-1}$.
[Indication : procéder par récurrence sur n en posant, pour $i \in \{1, ..., n-1\}$:

$$g_i(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{n-1}) = ||f_i(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{n-1}, .)||_{n-1}^{(n-1)/(n-2)} \quad]$$

2. Montrer que, si $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, alors :

$$||u||_{n/(n-1)} \leq |||\nabla u|||_1$$

3. Montrer que, si $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $p \in [1; n[$, alors :

$$||u||_{p^*} \leq C|||\nabla u|||_p$$

pour une certaine constante u ne dépendant que de n et p, où $p^* = np/(n-p)$.
[Indication : appliquer le résultat de la question 2. à $|u|^\gamma$, puis l'inégalité de Hölder, pour $\gamma > 1$ bien choisi.]

4. Montrer que, pour toute $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ (avec toujours $p \in [1; n[$) :

$$||u||_{p^*} \leq C|||\nabla u|||_p$$

où C est la même constante qu'à la question 3.

Exercice 6 : espaces de Sobolev d'ordre fractionnaire et injections de Sobolev

Soit $s \in \mathbb{R}$. On définit :

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L^2 \text{ tq } (1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathcal{F} f \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}$$

et on munit cet espace de la norme suivante :

$$||f||_{H^s} = ||(1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathcal{F} f||_2.$$

1. Montrer que si $s \in \mathbb{N}$, cette définition est équivalente à celle donnée précédemment dans le TD.

2. Montrer que, pour $s \in]0; 1[$, cette définition est équivalente à :

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ tq } \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} \, dx \, dy < +\infty \right\}.$$

3. Montrer que, pour tout $s > n/2$, $H^s(\mathbb{R}^n)$ est inclus dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ (muni de la norme uniforme) et l'injection est continue.

Exercice 7 : injections de Sobolev (suite)

Le but de la première partie de l'exercice est de montrer le théorème suivant :

Théorème. *Soit $s \in \mathbb{R}$. Si $0 \leq s < n/2$, alors l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ s'injecte continûment dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour tout p tel que $2 \leq p \leq 2n/(n - 2s)$.*

Dans la suite, on notera $q := 2n/(n - 2s)$ et on introduit la notation suivante (norme de Sobolev homogène) :

$$\|f\|_{\dot{H}^s} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} \, |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi \right)^{1/2}.$$

On considère $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et on suppose que $\|f\|_{\dot{H}^s} = 1$.

1. Montrer que pour tout $\lambda > 0$,

$$\|f\|_q^q = q \int_0^{+\infty} \lambda^{q-1} \, |\{|f| > \lambda\}| \, d\lambda,$$

où $\{|f| > \lambda\}$ est l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |f(x)| > \lambda\}$ et $|\{|f| > \lambda\}|$ la mesure de Lebesgue de cet ensemble.

2. Soit $A_\lambda > 0$ une constante qui dépend de λ. Pour tout $\lambda > 0$, on décompose f sous la forme $f = g_\lambda + h_\lambda$ (décomposition des hautes et basses fréquences) où g_λ et h_λ sont définies par :

$$\begin{array}{llll} \widehat{g_\lambda}(\xi) = \widehat{f}(\xi) & \text{si} \quad |\xi| \leq A_\lambda, & \widehat{g_\lambda}(\xi) = 0 & \text{si} \quad |\xi| > A_\lambda \\ \widehat{h_\lambda}(\xi) = 0 & \text{si} \quad |\xi| \leq A_\lambda, & \widehat{h_\lambda}(\xi) = \widehat{f}(\xi) & \text{si} \quad |\xi| > A_\lambda. \end{array}$$

Déterminer A_λ de sorte que $\{|g_\lambda| > \lambda/2\} = \emptyset$.
[Indication : on pourra montrer que $\|g_\lambda\|_\infty \leq C_1(s,n) A_\lambda^{\frac{n}{2}-s}$ où $C_1(s,n)$ est une constante strictement positive dépendant uniquement de n et de s.]
3. Pour le A_λ défini à la question précédente, montrer que

$$\|f\|_q^q \leq 4q \int_0^\infty \lambda^{q-3} \|h_\lambda\|_2^2 \, d\lambda.$$

4. Montrer que

$$\|f\|_q \leq C \|f\|_{\dot{H}^s}$$

où C est une constante positive.
5. Conclure la preuve du théorème.
6. Soit $p > 2$ et $s \geq s_p := d(1/2 - 1/p)$. Prouver qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $f \in H^s$,

$$\|f\|_p \leq C \|f\|_2^{1-\theta} \|f\|_{\dot{H}^s}^\theta \quad \text{avec} \quad \theta = s_p/s.$$

Exercice 8 : injections de Sobolev (cas général)

Le but de l'exercice est de démontrer le théorème suivant.

Théorème. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de bord régulier. Soit $p \in [1; n[$. On définit :*

$$p^* = \frac{np}{n-p}.$$

Alors, pour tout $q \in [1; p^*[$, $W^{1,p}(\Omega)$ est inclus dans $L^q(\Omega)$ et l'injection canonique est compacte.

[On rappelle que, si E et F sont deux espaces de Banach et si $A : E \to F$ est une application linéaire, on dit que A est un opérateur *compact* si l'image par A de la boule unité de E est d'adhérence compacte dans F.]

1. Soit Ω un ouvert borné fixé, de bord régulier. Montrer, à l'aide de l'exercice 5, que, pour tous $p \in [1; n[$ et $q \in [1; p^*]$, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ et l'injection canonique est continue.

2. Dans cette question, on suppose fixée une suite bornée $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, dont le support est compact et inclus dans un certain ouvert V borné.
On définit $(\eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ comme dans l'exercice 3. Quitte à agrandir un peu V, on peut supposer que, pour tous $k, s \in \mathbb{N}^*$, $f_k \star \eta_s$ est à support compact inclus dans V.
a) Soit s fixé. Montrer que la suite $(f_k \star \eta_s)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, uniformément bornée et équicontinue.
b) En déduire qu'il existe une sous-suite de $(f_k \star \eta_s)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $L^q(V)$.
[Indication : on rappelle que, d'après le théorème d'Ascoli, si K est un espace métrique compact, alors un sous-ensemble de $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{C}(K,\mathbb{C})$) est d'adhérence compacte pour la topologie uniforme si et seulement s'il est uniformément borné et équicontinu.]
c) Montrer qu'il existe une sous-suite de $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $L^q(\mathbb{R}^n)$.
[Indication : montrer que $f_k \star \eta_s$ converge vers f_k dans L^1, uniformément en k lorsque s tend vers $+\infty$; montrer ensuite le même résultat dans L^q.]

3. Montrer que l'injection canonique de $W^{1,p}(\Omega)$ vers $L^q(\Omega)$ est compacte.

[Indication : utiliser le théorème vu à l'exercice 4.]

Exercice 9 : inégalité de Poincaré-Sobolev

Démontrer le théorème suivant.

Théorème. *Soit Ω un ouvert borné de bord régulier. Soit $p \in [1;+\infty]$. Il existe une constante $C_\Omega > 0$ telle que, pour toute $u \in W^{1,p}(\Omega)$:*

$$\left\| u - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u \right\|_p \leq C_\Omega || |\nabla u| ||_p.$$

[Indication : raisonner par l'absurde et utiliser le résultat de l'exercice précédent pour $q = p$.]

Exercice 10 : traces

Dans cet exercice, on fixe $\Omega = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tq } x_1 > 0\}$. Ce choix simplifie les démonstrations mais les résultats démontrés restent vrais lorsque l'ensemble Ω est un ouvert à bord régulier quelconque.

1. a) Soit $p \in [1;+\infty[$. Montrer que pour toute fonction $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ à support compact :

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(0,x')|^p \, dx' \right)^{1/p} \leq C ||u||_{W^{1,p}(\Omega)}$$

pour une constante $C > 0$.

b) En admettant que la restriction à Ω des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ à support compact forme un sous-ensemble dense de $W^{1,p}(\Omega)$, montrer qu'il existe un unique opérateur continu $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\mathbb{R}^{n-1})$ tel que :

$$\forall\, u \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}^n), \qquad \gamma(u_{|\Omega}) = u(0,.).$$

2. On définit $W^{1,p}_0(\Omega)$ comme l'adhérence dans $W^{1,p}(\Omega)$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ (l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de Ω vers $\mathbb{R}$ à support compact inclus dans Ω).
Montrer que, pour toute $u \in W^{1,p}(\Omega)$, u appartient à $W^{1,p}_0(\Omega)$ si et seulement si $\gamma(u) = 0$.

3. Soit $s > 1/2$. On définit $H^s(\mathbb{R}^n)$ comme à l'exercice 6 et on pose :

$$H^s(\Omega) = \{u_{|\Omega} \text{ tq } u \in H^s(\mathbb{R}^n)\}$$

avec $||u||_{H^s(\Omega)} = \inf\{||v||_{H^s(\mathbb{R}^n)} \text{ tq } u = v_{|\Omega}\}$.
Montrer qu'il existe un unique opérateur continu $\gamma : H^s(\Omega) \to H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ tel que :

$$\forall\, u \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}^n), \qquad \gamma(u_{|\Omega}) = u(0,.).$$

Exercice 11 : théorème de Lax-Milgram

1. Énoncer le théorème de représentation de Riesz (ou de Riesz-Fréchet).
2. Démontrer le théorème de Lax-Milgram :

Théorème. *Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$. Soit $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue vérifiant la propriété suivante dite de coercivité :*

$$\exists\, c > 0,\ \forall x \in H, \qquad a(x,x) \geq c||x||^2.$$

Alors pour toute forme linéaire continue $\phi \in H'$, il existe un unique $u \in H$ tel que :

$$\forall\, v \in H, \qquad a(u,v) = \phi(v).$$

[Indication : écrire a sous la forme $a(.,.) = \langle A.,.\rangle$.]

Exercice 12 : application à une EDP elliptique en dimension 1

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $I =]a,b[$. On introduit l'espace $H^1_0(I)$ le sous-espace de $H^1(I)$ constitué des éléments u de $H^1(I)$ satisfaisant les conditions $u(a) = u(b) = 0$. Muni du produit scalaire de $H^1(I)$, l'espace $H^1_0(I)$ est un espace de Hilbert.

Soient $c \in L^\infty([a,b])$ avec $c \geq 0$ p.p. et $f \in L^2([a,b])$. On veut étudier la question d'existence et unicité de solution pour le problème

$$(*) \qquad -\,u''(x) + c(x)\,u(x) = f(x) \quad \text{pour} \quad x \in]a,b[\quad \text{et} \quad u(a) = u(b) = 0.$$

On dit que u est une solution classique de $(*)$ si u est dans $\mathcal{C}^2(\bar{I})$ et satisfait $(*)$ en tout point.

[Remarque : il s'agit d'une EDP extrêmement simple qui pourrait se résoudre par des techniques d'EDO. Néanmoins, le but est ici de voir une première application du théorème de Lax-Milgram. Pour cela, on va chercher des solutions de l'équation dans un espace a priori plus large que l'espace $\mathcal{C}^2(\bar{I})$.]

1. Prouver que si u est une solution de classe $\mathcal{C}^2$ de $(*)$, alors u satisfait :

$$(**) \qquad \forall\, \phi \in \mathcal{D}(I), \quad \int_I (u'(x)\phi'(x) + c(x)u(x)\phi(x))\,dx = \int_I f(x)\phi(x)\,dx.$$

On dit alors que $u \in H^1_0(I)$ est une solution faible de $(*)$ si u satisfait $(**)$ et que c'est une solution variationnelle de $(*)$ si

$$\forall\, v \in H^1_0(I), \quad \int_I (u'(x)v'(x) + c(x)u(x)v(x))\,dx = \int_I f(x)v(x)\,dx$$

(on vérifie que cette dernière formulation a bien un sens dans le cas où u et v sont dans $H^1_0(I)$).

2. On note $a(u,v) := \int_I (u'(x)v'(x) + c(x)u(x)v(x))\,dx$. Montrer que a définit une forme bilinéaire continue et coercive sur $H^1_0(I) \times H^1_0(I)$.

[Indication : on pourra utiliser l'inégalité de Poincaré qui donne l'existence d'une constante $C_P > 0$ telle que $\|u\|_{H^1(I)} \leq C_P \|u'\|_2$ pour tout $u \in H^1_0(I)$.]

3. Montrer qu'il existe une unique solution variationnelle de $(*)$.

On rappelle que $\mathcal{D}(I)$ est dense dans $H^1_0(I)$ et que $H^1(I)$ s'injecte continûment dans $\mathcal{C}^0(\bar{I})$.

4. On suppose de plus que c et f sont continues sur $[a,b]$ et que $c \geq 0$ sur $[a,b]$. Montrer qu'alors $(*)$ possède une unique solution classique de classe $\mathcal{C}^2$.

[Indication : pour l'existence, on pourra commencer par montrer que si $u \in H^1_0(I)$ est solution variationnelle du problème alors $u' \in H^1(I)$ et $(u')'(x) = c(x)u(x) - f(x)$ p.p..]