TD n°2. Opérateurs pseudo-différentiels et calcul symbolique

Exercice 1

Soit $a \in S^m_{\rho,0}$ pour un certain $m \in \mathbb{R}$ et un $\rho \in [0;1]$. On suppose qu'il existe $k < m$ tel que, pour tous α, β, il existe $R, C > 0$ vérifiant :

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)\right| \leq C(1+|\xi|)^{k-|\beta|} \qquad \text{si } |\xi| \geq R.$$

Montrer que a appartient à S^k.

Exercice 2 : commutateurs

Soit $a \in S^m$ un symbole d'ordre m. On définit l'opérateur pseudo-différentiel associé par :

$$\mathrm{Op}(a) : u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \mapsto \quad \left(x \mapsto \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} a(x,\xi)\hat{u}(\xi) d\xi\right)$$

1. On note $[\mathrm{Op}(a), \partial_j]$ le commutateur de $\mathrm{Op}(a)$ et de la dérivée partielle par rapport à la j-ième variable. Montrer qu'il s'agit à nouveau d'un opérateur pseudo-différentiel et calculer son symbole en fonction de a.

2. Même question pour $[\mathrm{Op}(a), x_j]$, où x_j désigne la multiplication par x_j.

Exercice 3 : approximation des symboles

Soit $m \in \mathbb{R}$. Pour tous α, $\beta \in \mathbb{N}^n$, on définit sur S^m les semi-normes :

$$p^m_{\alpha,\beta}(a) = \sup_{(x,\xi)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^{-(m-|\beta|)} \left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)\right|.$$

et on munit S^m de la topologie engendrée par la famille de semi-normes $\{p^m_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n}$.
Dire qu'une partie A de S^m est bornée revient à dire que pour tous α et β dans $\mathbb{N}^n$, il existe une constante $C_{\alpha,\beta}$ (dépendant de α et β) telle que $\sup_{a\in A} p^m_{\alpha,\beta}(a) \leq C_{\alpha,\beta}$.
Dire qu'une suite de symboles (a_n) converge vers a dans S^m signifie que $p^m_{\alpha,\beta}(a_n - a) \to 0$ pour tous α et β dans $\mathbb{R}^n$.
Soit $a \in S^0$. On définit a_ε pour tout $0 \leq \varepsilon \leq 1$ par $a_\varepsilon(x,\xi) = a(x, \varepsilon\xi)$ pour x, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $(a_\varepsilon)_{0\leq\varepsilon\leq 1}$ est bornée dans S^0.

2. Montrer que $a_\varepsilon \to a_0$ quand $\varepsilon \to 0$ dans S^m pour tout $m > 0$.

Exercice 4 : somme asymptotique de symboles

Soit $(m_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une suite strictement décroissante d'entiers telle que $m_j \to -\infty$ quand $j \to +\infty$. Pour tout j, soit $a_j \in S^{m_j}$. Soit $\chi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ telle que $\chi = 1$ au voisinage de 0.

1. Montrer qu'il existe une suite $\varepsilon_j \to 0$ telle que, pour tous α, β si on pose $\tilde{a}_j = (1-\chi(\varepsilon_j\xi))a_j$, on a, pour tout j assez grand :

$$\forall\, x, \xi, \qquad \left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \tilde{a}_j\right| \leq \frac{1}{2^j}(1+|\xi|)^{1+m_j-|\beta|}.$$

2. On pose $a = \sum_{j\in\mathbb{N}} \tilde{a}_j$. Montrer que cela définit bien une fonction $\mathcal{C}^\infty$.

3. Montrer que, pour tout k, $a - \sum_{j<k} a_j \in S^{m_k}$.

Exercice 5 : inversion des opérateurs elliptiques
Soit $a \in S^m$.
1. Soient $b, b' \in S^{-m}$ tels que $\mathrm{Op}(a)\,\mathrm{Op}(b) - \mathrm{Id} \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$ et $\mathrm{Op}(b')\,\mathrm{Op}(a) - \mathrm{Id} \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$. Montrer que $\mathrm{Op}(b) - \mathrm{Op}(b') \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$.
2. On suppose qu'il existe $b \in S^{-m}$ tel que $\mathrm{Op}(a)\,\mathrm{Op}(b) - \mathrm{Id} \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$. Montrer qu'il existe $C, R > 0$ tels que :

$$\forall\,|\xi| \geq R, \qquad |a(x,\xi)| \geq C(1+|\xi|^2)^{m/2}. \tag{1}$$

3. On suppose que a vérifie (1). Soit $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$ telle que $F(z) = z^{-1}$ pour $|z| \geq C$. On pose :

$$b(x,\xi) = \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{m/2}}\, F(a(x,\xi)(1+|\xi|^2)^{-m/2}).$$

Montrer que $b \in S^{-m}$ et qu'on peut écrire $\mathrm{Op}(a)\,\mathrm{Op}(b) = \mathrm{Id} - R$ avec $R \in \mathrm{Op}(S^{-1})$.
4. Construire $B \in \mathrm{Op}(S^{-m})$ tel que :

$$\mathrm{Op}(a)B - \mathrm{Id} \in \mathrm{Op}(S^{-\infty}).$$

Construire de même un inverse à gauche.
[Indication : on pourra utiliser l'exercice 4.]

Exercice 6 : opérateurs locaux
Soit P un opérateur pseudo-différentiel local, c'est-à-dire que,

$$\forall\, u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \mathrm{Supp}(Pu) \subset \mathrm{Supp}(u).$$

1. Supposons P d'ordre $m < -n/2$. Soient $x_0 \in \mathbb{R}^n, u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Montrer qu'il existe une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ telle que $u_k \to u$ dans L^2 et $u_k = 0$ au voisinage de x_0. En déduire $Pu(x_0) = 0$.
[Indication : utiliser le fait que, pour $s > n/2$, H^s est inclus dans $\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^n)$, avec injection continue.]
2. Supposons P d'ordre $m < 0$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $P^k = 0$. En déduire que $P = 0$.
[Indication : utiliser la question 3. a) de l'exercice 7.]
3. Supposons P d'ordre $m < k \in \mathbb{N}^*$.
a) Montrer que, pour tout x_0, la distribution $u \mapsto Pu(x_0)$ est une combinaison linéaire finie de $\delta^{(i)}$ (où, pour tout multi-indice i, $\delta^{(i)}$ désigne ici la dérivée partielle i-ème, prise au point x_0).
b) Montrer que le nombre de i qui interviennent dans la combinaison linéaire lorsque x_0 varie est borné.
[Indication : réutiliser une partie du raisonnement de la question 1.]
c) En déduire que $P = \sum_{|\alpha|\leq k-1} a_\alpha(x)\partial_x^\alpha$, avec $a_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 7 : opérateurs pseudo-différentiels nilpotents
1. Soient $a \in S^\nu$, $\nu \in \mathbb{R}$ et $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. On suppose que :

$$\chi \geq 0 \quad \text{et} \quad \chi(\xi) \neq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1/2 < |\xi| < 2$$

Pour tout $\lambda \geq 1$, on pose $a_\lambda(x,\xi) = \chi(\xi)a(x,\lambda\xi)$. Montrer l'équivalence entre les conditions suivantes :

(i) $a \in S^m$,

(ii) pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, il existe $C > 0$ tel que $\forall\, \lambda \geq 1$, $\|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a_\lambda\|_\infty \leq C\lambda^m$.

2. a) Soit $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$. On suppose que f est bornée et $\partial^\alpha f$ aussi, pour tout multi-indice α tel que $|\alpha| = k$. Montrer qu'il existe une constante C indépendante de f telle que, pour tout β vérifiant $0 \leq |\beta| \leq k$:

$$\|\partial^\beta f\|_\infty \leq C \left(\|f\|_\infty + \sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|_\infty \right).$$

b) Montrer que, pour tout β vérifiant $0 \leq |\beta| \leq k$:

$$\|\partial^\beta f\|_\infty \leq C \|f\|_\infty^{1-|\beta|/k} \left(\sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|_\infty \right)^{|\beta|/k}.$$

[Indication : considérer la fonction $g : x \to f(\lambda x)$ pour un λ bien choisi.]
c) Soit $a \in S^m$. On suppose qu'il existe $\mu < m$ et $C > 0$ tels que, pour tous x, ξ, $|a(x,\xi)| \leq C(1+|\xi|)^\mu$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $a \in S^{\mu+\varepsilon}$.
[Indication : utiliser la question 1.]

3. a) Soit A un opérateur pseudo-différentiel nilpotent (c'est-à-dire tel que $A^k = 0$ pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$). Montrer que $A \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$.
b) Donner un exemple non trivial d'un tel opérateur pour $k = 2$.