TD n°3. Opérateurs pseudo-différentiels, calcul symbolique et intégrales oscillantes

Exercice 1 : calculs d'intégrales oscillantes

1. Soit $a \in A^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Montrer que, pour tout j :

$$\int e^{-iy.x} x_j a(x,y) dx dy = -i \int e^{-iy.x} \partial_{y_j} a(x,y) dx dy.$$

2. Soit $a \in A^m(\mathbb{R}^n)$. Montrer que :

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{-iy.x} a(y) dy dx = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{-iy.x} a(x) dy dx = a(0).$$

3. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. Montrer que :

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{-iy.x} \, \frac{y^\alpha x^\beta}{\alpha! \beta!} dy dx = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \\ \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} & \text{si } \alpha = \beta. \end{cases}$$

Exercice 2 : développement asymptotique de l'inverse

Soit $a \in S^m$. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tous $x, \xi \in \mathbb{R}^n$:

$$|a(x,\xi)| \geq C(1+|\xi|)^m.$$

On a vu dans l'exercice 5 du TD 2 qu'il existe $b \in S^{-m}$ vérifiant :

$$\mathrm{Op}(a) \circ \mathrm{Op}(b) = \mathrm{Id} + R \qquad \text{avec } R \in \mathrm{Op}(S^{-\infty}).$$

Le but de l'exercice est de trouver $b_1 \in S^{-m}$, $b_2 \in S^{-m-1}$ tels que $b - (b_1 + b_2) \in S^{-m-2}$.

1. Montrer que le symbole b' défini par $b' = b - 1/a$ est dans S^{-m-1}.
2. Montrer que

$$\mathrm{Id} + R = \mathrm{Op}\left(1 - \frac{1}{ia^2} \sum_j (\partial_{\xi_j} a)(\partial_{x_j} a) + ab'\right) + S$$

avec $S \in \mathrm{Op}(S^{-2})$.

3. Conclure.

Exercice 3 : paramétrice d'un problème elliptique

Soit $P(\xi)$ un polynôme en ξ, de degré m, à n variables, tel qu'il existe $R, C > 0$ tels que :

$$|P(\xi)| \geq C|\xi|^m, \qquad \forall\, |\xi| \geq R.$$

On dit alors que l'opérateur $P(D)$ est elliptique.

1. Soit $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\chi = 1$ sur $B(0, R)$. Montrer que, pour toute $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, l'intégrale suivante a un sens (au sens des intégrales oscillantes) :

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix.\xi} \frac{1-\chi(\xi)}{P(\xi)} u(x) dx d\xi$$

2. Soit U un ouvert borné ne contenant pas 0. On considère la distribution T sur $\mathcal{D}(U)$ définie par :

$$T(u) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix.\xi} \frac{1-\chi(\xi)}{P(\xi)} u(x) dx d\xi$$

Montrer que T s'identifie à une fonction de $L^2(U)$.

3. Montrer de même que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\partial^\alpha T$ s'identifie à une fonction de $L^2(U)$. En déduire que, sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n - \{0\})$, T s'identifie à une fonction $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n - \{0\})$.

4. Montrer qu'on a $P(D)T = \delta_0 + r$ avec $r \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. La distribution T est appelée *paramétrice* de $P(D)$.

5. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une paramétrice de $P(D)$ à support dans $B(0, \varepsilon)$.

Exercice 4 : lemme de Schur

Soit $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe $A > 0$ tel que :

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int |K(x, y)| dx \leq A \qquad \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int |K(x, y)| dy \leq A$$

Pour toute $u \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$, on pose :

$$Pu(x) = \int K(x, y) u(y) dy$$

1. Montrer que Pu est bien définie et appartient à L^∞.

2. On va montrer que P se prolonge de manière unique en un opérateur continu de L^2 dans L^2, qui vérifie :

$$||Pu||_2 \leq A||u||_2$$

a) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que, pour toute u et pour tout x :

$$|Pu(x)|^2 \leq A \int |K(x, y)|\, |u(y)|^2 dy$$

b) Conclure.

Exercice 5 : continuité sur L^2 d'un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0

Dans cet exercice, on donne une nouvelle démonstration du théorème suivant.

Théorème. *Soit $a \in S^0(\mathbb{R}^n)$. Alors* $\mathrm{Op}(a)$ *s'étend en un opérateur continu de L^2 vers L^2.*

1. On commence par supposer $a \in S^{-(n+1)}$.
a) Montrer que $\mathrm{Op}(a)$ s'écrit sous la forme $\mathrm{Op}(a)u(x) = \int K(x,y)u(y)dy$ pour un *noyau* K qu'on calculera.
b) Montrer que $(1+|x-y|^{n+1})K(x,y)$ est une fonction bornée.
c) Démontrer le théorème à l'aide du lemme de Schur.

2. Montrer par récurrence sur $k \in \{0,...,n\}$ que le théorème est vrai si $a \in S^{k-(n+1)}$.
[Indication : utiliser l'identité $||T^*T||_{L^2\to L^2} = ||T||^2_{L^2\to L^2}$.]

3. La question précédente démontre en particulier le théorème lorsque $a \in S^{-1}$.
On suppose maintenant $a \in S^0$.
a) Montrer que si $M > 0$ est assez grand, il existe un symbole $c \in S^0(\mathbb{R}^n)$ tel que :

$$\mathrm{Op}(c)^* \,\mathrm{Op}(c) = M\mathrm{Id} - \mathrm{Op}(a)^* \,\mathrm{Op}(a) + R$$

avec $R \in \mathrm{Op}(S^{-1})$.
b) Conclure.

Exercice 6 : régularité du noyau en dehors de la diagonale

Soit $a \in S^m$, pour un certain $m \in \mathbb{R}$.

1. Rappeler l'expression du noyau de $\mathrm{Op}(a)$.

2. Montrer que, si $m = -\infty$, alors le noyau est $\mathcal{C}^\infty$.

3. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que $x \neq y$. Soient $\phi, \psi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ telles que :
   1. ϕ vaut 1 au voisinage de x.
   2. ψ vaut 1 au voisinage de y.
   3. $\mathrm{Supp}(\phi) \cap \mathrm{Supp}(\psi) = \emptyset$.

Montrer que $M_\phi \,\mathrm{Op}(a) M_\psi$ appartient à $\mathrm{Op}(S^{-\infty})$ (où M_ϕ et M_ψ désignent respectivement les multiplications par ϕ et ψ).

4. Calculer le noyau de $M_\phi \,\mathrm{Op}(a) M_\psi$ en fonction du noyau de $\mathrm{Op}(a)$.

5. Montrer que le noyau de $\mathrm{Op}(a)$ est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de (x, y).

Exercice 7 : symboles locaux

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert, on appelle $S^m_{loc}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $a : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ telles que, pour toute $\phi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$, ϕa appartient à $S^m(\mathbb{R}^n)$.

1. Pour toute $a \in S^m_{loc}(\Omega)$, on définit, pour toute fonction u « convenable » :

$$\forall\, x \in \Omega, \qquad \mathrm{Op}_\Omega(a)u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi} a(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi.$$

a) Montrer que cette formule définit un opérateur de $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ vers $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.
b) Pour toute $\phi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$, on note $M_\phi : \mathcal{C}^\infty(\Omega) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ l'opérateur qui, à u, associe ϕu (prolongée par 0 en-dehors de Ω).
Montrer que, pour toute $v \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$, si $\phi, \tilde{\phi} \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ valent 1 sur le support de v, alors :

$$(\mathrm{Op}(\phi a))^* v = (\mathrm{Op}(\tilde{\phi} a))^* v$$

c) En déduire qu'on peut étendre $\mathrm{Op}_\Omega(a)$ en un opérateur de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ vers $\mathcal{D}'(\Omega)$.

2. On suppose que $A : \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \to \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ est un opérateur linéaire vérifiant la propriété suivante : pour toutes $\phi, \psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, $M_\phi A M_\psi$ appartient à $\mathrm{Op}(S^m)$.
On va montrer qu'il existe $a \in S^m_{loc}(\Omega)$ tel que $A = \mathrm{Op}_\Omega(a) + R$, pour un certain opérateur R de la forme :

$$Ru : x \in \Omega \to \int_\Omega K(x,y)u(y)dy$$

avec $K \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \times \Omega)$.

On admet l'existence d'une *partition de l'unité* de Ω, c'est-à-dire une suite $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

1. pour tout $K \subset \Omega$ compact, $\{j \text{ tq } \mathrm{Supp}(\psi_j) \cap K \neq \emptyset\}$ est fini.
2. pour tout $x \in \Omega$, $\sum_j \psi_j(x) = 1$.

a) Montrer que, pour toute $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, cela a un sens d'écrire :

$$Au = \sum_{j,k\in\mathbb{N}} A_{jk}u$$

où on a noté $A_{jk} = M_{\psi_j} A M_{\psi_k}$.
b) On note $I = \{(j,k) \text{ tq } \mathrm{Supp}(\psi_j)\cap\mathrm{Supp}(\psi_k) \neq \emptyset\}$. Montrer que $\sum_{(j,k)\in I} A_{jk}$ est de la forme $\mathrm{Op}_\Omega(a)$ avec $a \in S^m_{loc}(\Omega)$.
c) Montrer que, pour tout $(j,k) \notin I$, A_{jk} est un opérateur à noyau $\mathcal{C}^\infty$. Montrer que le support du noyau est inclus dans $\mathrm{Supp}(\psi_j) \times \mathrm{Supp}(\psi_k)$.
[Indication : utiliser l'exercice 3.]
d) Démontrer le résultat voulu.