TD n°4. Equations hyperboliques et calcul pseudo-différentiel

Exercice 1 : méthode des caractéristiques

1. Soit $v \in \mathbb{R}^n$ et $f_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. Montrer que le problème de Cauchy d'inconnue $f = f(t,x)$

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = 0, \qquad f(0,x) = f_0(x),$$

admet une unique solution $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$, donnée par la formule

$$f(t,x) = f_0(x - tv), \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}_+,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

2. [Lemme de Gronwall] Soient $A > 0$, $B > 0$ et $\phi \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue telle que, pour tout $t \geq 0$,

$$\phi(t) \leq A + B \int_0^t \phi(s)\, ds.$$

Montrer que, pour tout $t \geq 0$, on a l'inégalité $\phi(t) \leq Ae^{Bt}$.

3. Soit $T > 0$ et $V \colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs admettant des dérivées partielles d'ordre 1 par rapport aux variables x_j pour $j = 1, \ldots, d$ et vérifiant les hypothèses suivantes

(**H1**) $$V \text{ et } \nabla_x V \text{ sont continues sur } [0,T] \times \mathbb{R}^n,$$

et il existe une constante $\kappa > 0$ telle que, pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$,

(**H2**) $$|V(t,x)| \leq \kappa(1 + |x|).$$

On considère maintenant le problème à coefficients variables

$$\partial_t f(t,x) + V(t,x) \cdot \nabla_x f(t,x) = 0, \quad f(0,x) = f_0(x),$$

pour lequel on souhaite étendre la méthode présentée à la question 1. pour le cas de coefficients constants.

Rappelons que l'on dit que γ est une courbe intégrale du champ V passant par x à l'instant t si $\gamma \colon s \mapsto \gamma(s) \in \mathbb{R}^n$ vérifie

$$\frac{d}{ds}\gamma(s) = V(s, \gamma(s)), \qquad \gamma(t) = x.$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz entraîne l'existence locale d'une telle courbe intégrale.

Montrer que pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ la courbe intégrale $s \mapsto \gamma(s)$ de V passant par x à l'instant t est définie pour tout $s \in [0,T]$. Dans la suite on notera $s \mapsto X(s,t,x)$ cette courbe intégrale, qui est donc par définition solution de

$$\partial_s X(s,t,x) = V(s, X(s,t,x)), \qquad X(t,t,x) = x.$$

L'application $X : [0,T] \times [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ainsi définie est appelée le *flot caractéristique* de l'équation $\partial_t + V \cdot \nabla_x$.

4. Soient $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle

$$\dot{y}(s) = y(s)^2, \quad y(t) = x$$

et en déduire que l'on ne peut pas définir le flot de $\partial_t + x^2 \partial_x$ de façon globale (on remarque que dans ce cas, l'hypothèse (**H2**) n'est pas vérifiée).

5. Montrer que pour tous $t_1, t_2, t_3 \in [0, T]$, on a

$$X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) = X(t_3, t_1, x).$$

6. Montrer que $\partial_s \partial_{x_j} X(s, t, x)$ et $\partial_{x_j} \partial_s X(s, t, x)$ existent pour tous $(s, t, x) \in]0, T[\times]0, T[\times \mathbb{R}^n$, et se prolongent en des fonctions continues sur $[0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}^n$ et que

$$\partial_s \partial_{x_j} X(s, t, x) = \partial_{x_j} \partial_s X(s, t, x),$$

pour tout $(s, t, x) \in [0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}^n$.

7. Montrer que pour tout $(s, t) \in [0, T] \times [0, T]$ l'application

$$X(s, t, \cdot) \colon x \mapsto X(s, t, x)$$

est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.

8. Montrer que $X \in \mathcal{C}^1([0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$.

9. Montrer que

$$\partial_t X(0, t, x) + \sum_{j=0}^{d} V_j(t, x) \partial_{x_j} X(0, t, x) = 0,$$

pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$.

10. Soit $f_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. Montrer que la fonction f définie par

$$f(t, x) = f_0(X(0, t, x))$$

est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ et vérifie

$$\partial_t f(t, x) + V(t, x) \cdot \nabla_x f(t, x) = 0, \quad f(0, x) = f_0(x).$$

Exercice 2 : résolution d'un problème non-linéaire

On rappelle le résultat suivant : si a_t est un symbole hyperbolique dépendant du temps, $T > 0$, $s \in \mathbb{R}$, $u_0 \in H^s$ et $f \in \mathcal{C}^0([0; T], H^s)$, alors il existe $u \in \mathcal{C}^0([0; T], H^s) \cap \mathcal{C}^1([0; T], H^{s-1})$ solution de l'équation :

$$\partial_t u + \mathrm{Op}(a_t) u = f, \qquad u(0) = u_0.$$

De plus, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $t \in [0, T]$:

$$\|u(t)\|_{H^s} \leq C \left(\|u_0\|_{H^s} + \int_0^t \|f(\tau)\|_{H^s} \, d\tau \right).$$

On suppose dans tout l'exercice $s > n/2$.

1. Soient $u, v \in H^s$. Montrer que $uv \in H^s$ et :

$$\|uv\|_{H^s} \leq C\|u\|_{H^s}\|v\|_{H^s}$$

[Indication : on pourra utiliser l'inégalité :

$$(1+|\xi|^2)^{s/2} \leq 2^s((1+|\xi-\eta|^2)^{s/2} + (1+|\eta|^2)^{s/2})$$

ainsi que l'inégalité de Young :

$$\|u \star v\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^1}\|v\|_{L^p} \quad]$$

Soit a_t un symbole hyperbolique dépendant du temps. On veut résoudre le problème suivant, pour $u_0 \in H^s$:

$$\partial_t u + \mathrm{Op}(a_t)u = u^2, \qquad u(0) = u_0. \tag{1}$$

Par abus de language, on notera également u_0 la fonction constante $t \in [0;T] \mapsto u_0 \in H^s$.

2. Soit $T > 0$. Pour tout n, on se donne (grâce au résultat rappelé en début d'exercice) $u_{n+1} \in \mathcal{C}^0([0;T], H^s) \cap \mathcal{C}^1([0;T], H^{s-1})$ solution de l'équation :

$$\partial_t u_{n+1} + \mathrm{Op}(a_t)u_{n+1} = u_n^2, \qquad u_{n+1}(0) = u_0$$

Montrer qu'il existe C telle que, si $T \leq \frac{C}{\|u_0\|_{H^s}}$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et de Cauchy dans $\mathcal{C}^0([0;T], H^s) \cap \mathcal{C}^1([0;T], H^{s-1})$.

3. En déduire l'existence d'une solution $u \in \mathcal{C}^0([0;T], H^s) \cap \mathcal{C}^1([0;T], H^{s-1})$ au problème (1).

Exercice 3 : racine carrée

Soit $a \in S^m$. On suppose qu'il existe $c, R > 0$ tels que, pour tous $x, \xi \in \mathbb{R}^n$:

$$\mathrm{Re}\, a(x,\xi) \geq c(1+|\xi|^2)^{m/2} \qquad \text{si} \quad |\xi| \geq R.$$

1. Montrer qu'il existe une suite de symboles $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $b_k \in S^{m/2-k}$ et pour tout $K \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{Op}(a) - \mathrm{Op}(b_0 + ... + b_K) \circ \mathrm{Op}(b_0 + ... + b_K) \in \mathrm{Op}(S^{m-K-1}).$$

[Indication : considérer F une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui coïncide avec une détermination de la racine carrée sur $\{z \in \mathbb{C} \text{ tq } \mathrm{Re}(z) \geq c\}$ puis poser

$$b_0(x,\xi) = (1+|\xi|^2)^{m/4} F(a(x,\xi)(1+|\xi|^2)^{-m/2}).$$

Procéder ensuite par récurrence.]

2. Montrer qu'il existe $b \in S^{m/2}$ tel que $\mathrm{Op}(a) - \mathrm{Op}(b) \circ \mathrm{Op}(b) \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$.

Exercice 4 : inégalité de Gårding

Soit $m \geq 0$.

1. Soit $a \in S^m$. On suppose qu'il existe $c, R > 0$ tel que, pour tous $x, \xi \in \mathbb{R}^n$:

$$|a(x,\xi)| \geq c(1+|\xi|)^m \qquad \text{si} \quad |\xi| \geq R.$$

Soient $s, t \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $K_0, K_1 > 0$ telles que, pour toute $u \in H^s$:

$$\|u\|_{H^s} \leq K_0 \| \operatorname{Op}(a)u\|_{H^{s-m}} + K_1 \|u\|_{H^t}.$$

[Indication : introduire $b \in S^{-m}$ tel que $\operatorname{Op}(b) \circ \operatorname{Op}(a) - \operatorname{Id} \in \operatorname{Op}(S^{-\infty})$.]

2. Soit $a \in S^m$. On suppose qu'il existe $c, r > 0$ tels que, pour tous $x, \xi \in \mathbb{R}^n$:

$$\operatorname{Re} a(x,\xi) \geq c(1+|\xi|)^m \qquad \text{si} \quad |\xi| \geq r.$$

a) Montrer qu'il existe $R \in \operatorname{Op}(S^{m-1})$ tel que, pour toute $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\operatorname{Re} \langle \operatorname{Op}(a)u, u\rangle = \langle \operatorname{Op}(\operatorname{Re} a)u, u\rangle + \langle Ru, u\rangle .$$

b) Montrer que, pour tout $T \in \operatorname{Op}(S^{m-1})$, il existe $C > 0$ tel que, pour toute $u \in H^{(m-1)/2}(\mathbb{R}^n)$:

$$|\langle Tu, u\rangle| \leq C\|u\|^2_{H^{(m-1)/2}}.$$

c) Montrer qu'il existe $C_0, C_1 > 0$ tels que, pour toute $u \in H^{m/2}(\mathbb{R}^n)$:

$$\operatorname{Re} \langle \operatorname{Op}(a)u, u\rangle \geq C_0\|u\|^2_{H^{m/2}} - C_1\|u\|^2_{H^{(m-1)/2}}.$$

[Indication : montrer qu'il existe $b \in S^{m/2}$ tel que $\operatorname{Op}(\operatorname{Re} a) = \operatorname{Op}(b)^* \circ \operatorname{Op}(b) + S$ avec $S \in \operatorname{Op}(S^{m-1})$.]

3. [Raffinement] Montrer que, pour tout $s \in \mathbb{R}$, il existe $A_s, B_s > 0$ des constantes telles que :

$$\forall\, u \in H^{m/2}(\mathbb{R}^n), \qquad \operatorname{Re} \langle \operatorname{Op}(a)u, u\rangle \geq A_s\|u\|^2_{H^{m/2}} - B_s\|u\|^2_{H^s}.$$

[Indication : majorer $\|u\|_{H^{(m-1)/2}}$ en fonction de $\|u\|_{H^{m/2}}$ et $\|u\|_{H^s}$.]

Exercice 5 : application de l'inégalité de Gårding

Soit Ω un ouvert borné de bord régulier.

Soient $L_1, ..., L_s, L'_1, ..., L'_s$ des opérateurs différentiels réels d'ordre au plus $k \in \mathbb{N}$ (avec des coefficients $\mathcal{C}^\infty$, bornés et ayant toutes leurs dérivées bornées). Alors $L = L_1 \circ L'_1 + ... + L_s \circ L'_s$ est un opérateur différentiel d'ordre au plus $2k$. On suppose que le symbole l associé vérifie, pour des constantes $c, R > 0$:

$$|l(x,\xi)| \geq c(1+|\xi|)^{2k} \qquad \text{si} \quad |\xi| \geq R.$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $L_\lambda = L + \lambda \mathrm{Id}$.

On considère, pour une fonction $f \in H^{-k}(\Omega) = (H^k_0(\Omega))'$ fixée, le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} L_\lambda u &= f \text{ sur } \Omega \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on dit que $u \in H^k_0(\Omega)$ est une solution faible du problème de Dirichlet si, pour toute $v \in H^k_0(\Omega)$:

$$\left\langle L'_1 u, L^*_1 v\right\rangle + ... + \left\langle L'_s u, L^*_s v\right\rangle + \lambda \langle u, v\rangle = \langle f, v\rangle .$$

Démontrer que, pour toute f, si λ est assez grand, alors le problème de Dirichlet admet une solution faible.

[Indication : utiliser le théorème de Lax-Milgram (qui a été revu dans le TD 1).]

Exercice 6 : les opérateurs pseudo-différentiels sont bornés sur L^2

1. Soit H un espace de Hilbert. Soit $(T_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une suite d'opérateurs continus de H vers H. On suppose qu'il existe une fonction paire $\omega : \mathbb{Z} \to]0; +\infty[$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

1. $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \omega(j) < +\infty$
2. $\forall j,k, \quad \sqrt{\|T_j^* T_k\|} \leq \omega(j-k)$
3. $\forall j,k, \quad \sqrt{\|T_j T_k^*\|} \leq \omega(j-k)$

On note $\sigma = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \omega(j)$.
a) Montrer que, pour tout j, $\|T_j\| \leq \omega(0)$.
b) Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et tout $(i_1, ..., i_{2N}) \in \mathbb{Z}^{2N}$:

$$\|T_{i_1}^* T_{i_2} T_{i_3}^* T_{i_4} ... T_{i_{2N-1}}^* T_{i_{2N}}\| \leq \omega(0)\omega(i_1 - i_2)\omega(i_2 - i_3)...\omega(i_{2N-2} - i_{2N-1})\omega(i_{2N-1} - i_{2N})$$

c) Montrer que, pour tout sous-ensemble fini F de $\mathbb{Z}$, si on note $U = \sum_{j\in F} T_j$, alors :

$$\|U\| \leq \sigma.$$

[Indication : à l'aide de la question précédente, majorer $\|(U^*U)^N\|$ pour tout N.]
2. Dans cette question, on montre que, pour tout $a \in S^0_{0,0}$, $\mathrm{Op}(a) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se prolonge en un opérateur continu de $L^2(\mathbb{R}^n)$ vers $L^2(\mathbb{R}^n)$, dont la norme est majorée par une combinaison linéaire des normes de certaines dérivées partielles de a.
Remarquons qu'on a déjà vu ce résultat pour $a \in S^0_{1,0} = S^0$ mais que le théorème pour $a \in S^0_{0,0}$ est plus fort.

On admet le théorème suivant, variante du théorème démontré à la question 1.c).

Théorème. *Soit $(A_z)_{z\in\mathbb{R}^2}$ une famille bornée d'opérateurs de $L^2(\mathbb{R}^2)$ dans lui-même, mesurable en z. On suppose qu'il existe $h : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :*

1. *$\forall z, z', \quad \|A_z A_{z'}^*\| \leq h(z,z')^2$*
2. *$\forall z, z', \quad \|A_z^* A_{z'}\| \leq h(z,z')^2$*
3. *l'opérateur H ayant h pour noyau est borné de $L^2(\mathbb{R}^2)$ vers $L^2(\mathbb{R}^2)$.*

Alors, pour toute fonction $\gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ mesurable et bornée, $A = \int_{\mathbb{R}^2} \gamma(z) A_z dz$ est un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R}^2)$, dont la norme vérifie :

$$\|A\|_{L^2\to L^2} \leq \|\gamma\|_\infty \|H\|_{L^2\to L^2}.$$

a) Montrer qu'il suffit de démontrer le résultat de continuité voulu en dimension $n = 1$. On fera dans la suite l'hypothèse que n vaut 1.
[Indication : on pourra utiliser le fait que, si $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$, alors $(u_{k_1}(x_1)...u_{k_n}(x_n))_{k_1,...,k_n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^n)$.]
b) Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\phi(x) = x^2 e^{-x}/2$ si $x \geq 0$ et $\phi(x) = 0$ sinon. Montrer qu'au sens des distributions :

$$(1 + \partial_x)^3 \phi = \delta_0.$$

c) On pose $g(x,\xi) = (1 + \partial_x)^3 (1 + \partial_\xi)^3 a(x,\xi)$. Montrer que :

$$\forall x, \xi, \qquad a(x,\xi) = \int g(s,t)\phi(x-s)\phi(\xi - t) ds dt.$$

d) Pour tous $s, t \in \mathbb{R}$, on pose :

$$A_{st} : f \in L^2(\mathbb{R}) \mapsto \left(x \mapsto \int e^{ix\xi} \phi(x-s)\phi(\xi - t)\hat{f}(\xi) d\xi \right).$$

Soient s, t, s', t' quelconques. Montrer que $A_{st}A^*_{s't'}$ est un opérateur à noyau. Calculer le noyau, qu'on notera K.
e) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|K(x, y)| \leq Ce^{-|t-t'|/2}(1 + |x - y|)^{-3}\phi(x - s)\phi(y - s').$$

f) Montrer que, pour une certaine constante $c > 0$:

$$\forall s, t, s', t', \qquad \|A_{st}A^*_{s't'}\|_{L^2 \to L^2} \leq c(1 + |s - s'|)^{-3}e^{-|t-t'|/2}.$$

[Indication : on pourra utiliser l'inégalité $\|A_{st}A^*_{s't'}\|^2 \leq \int |K(x, y)|^2 dxdy$.]
On admet que $\|A^*_{st}A_{s't'}\|$ vérifie la même inégalité.
g) Démontrer le théorème.