TD n°6. Inégalité de Poincaré

Une inégalité de Poincaré est une inégalité qui permet de contrôler la norme L^2 d'une fonction par la norme L^2 de son gradient. Ces inégalités jouent un rôle fondamental en analyse. Il en existe de nombreuses versions et nous allons en discuter certaines dans ce TD. On remarquera que l'inégalité de Poincaré-Wirtinger est clairement fausse pour les fonctions constantes (pour une fonction u constante on ne peut pas contrôler la norme L^2 de u par la norme L^2 de sa dérivée u'). L'hypothèse que u est de moyenne nulle (exercice 1 par exemple) permet de “filtrer” les fonctions constantes. Une autre façon de filtrer ces fonctions constantes consiste à supposer que u s'annule, en un certain sens, sur une partie de l'ouvert (exercice 2 par exemple).

Dans tout le TD, n désigne un entier naturel non nul.

Exercice 1 : inégalité de Poincaré-Wirtinger et équation de la chaleur en dimension 1

1. Soit $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ qui est T-périodique. Montrer que si $\int_0^T u(t)\,dt = 0$ alors

$$\left(\int_0^T |u(t)|^2\,dt\right)^{1/2} \leq \frac{T}{2\pi}\left(\int_0^T |u'(t)|^2\,dt\right)^{1/2}.$$

[Indication : utiliser une décomposition en séries de Fourier.]

2. Soit $u = u(t,x)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, 2π-périodique en x, et solution de l'équation de la chaleur

$$\partial_t u - \partial_x(\gamma(x)\partial_x u) = 0,$$

où γ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$, 2π-périodique et minorée par une constante strictement positive. Montrer que si la moyenne $\int_{-\pi}^{\pi} u(0,x)\,dx$ s'annule, alors il existe une constante C telle que, pour tout temps $t \geq 0$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(t,x)^2\,dx \leq e^{-tC}\int_{-\pi}^{\pi} u(0,x)^2\,dx.$$

Exercice 2 : inégalité de Poincaré et problème de Dirichlet homogène

1. On considère dans cette question un réel $R > 0$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ inclus dans le rectangle

$$\mathcal{R} = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R} \,:\, |x_n| \leq R\}.$$

Montrer que pour toute $u \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq 2R\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

[Indication : comme $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$ par définition et comme les deux termes de l'inégalité sont continus pour la norme H^1, il suffit de démontrer cette inégalité pour $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.]

2. Pour Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on rappelle que l'espace $H_0^1(\Omega)$ est défini comme l'adhérence de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. Dans cette question, on considère Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ qui est $\mathcal{C}^1$ et borné. Considérons une fonction $V \in L^\infty(\Omega)$, positive ou nulle, une fonction F définie sur Ω. Le problème dit de Dirichlet homogène est le problème suivant : peut-on trouver une unique fonction u vérifiant

$$-\Delta u + Vu = F \quad \text{dans } \Omega, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Pour u et v appartenant à $H^1(\Omega)$, on introduit

$$B(u,v) = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + Vuv)\, dx.$$

a) Montrer que la forme B est un produit scalaire sur $H_0^1(\Omega)$. On note $E(u) = B(u,u)$ pour $u \in H_0^1(\Omega)$, montrer que l'application $u \mapsto E(u)^{1/2}$ est une norme équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.
b) Soit $F \in L^2(\Omega)$. On dit qu'une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ est une solution faible du problème de Dirichlet homogène

$$-\Delta u + Vu = F, \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

si

$$\forall\, \phi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega), \qquad \int_\Omega \Big(\nabla u \cdot \nabla \phi + Vu\phi\Big)\, dx = \int_\Omega F\phi\, dx.$$

Pour tout $F \in L^2(\Omega)$, montrer que le problème de Dirichlet

$$-\Delta u + Vu = F, \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

a une unique solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$.

Exercice 3 : inégalité de Poincaré-Sobolev

On rappelle le résultat suivant (voir TD 1 exercice 8 pour la démonstration).

Théorème (de Rellich-Kondrachov)**.** *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$.*

— *Si $n \geq 2$ et $2 \leq q < 2n/(n-2)$, $H^1(\Omega)$ s'injecte de façon compacte dans $L^q(\Omega)$.*
— *Si $n = 1$, $H^1(\Omega)$ s'injecte de façon compacte dans $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$.*

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. Étant donnée une fonction $u \in H^1(\Omega)$, notons $\langle u\rangle_\Omega$ sa moyenne sur Ω : $\langle u\rangle_\Omega = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x)\, dx$. Montrer qu'il existe une constante $C(\Omega)$ telle que

$$\forall\, u \in H^1(\Omega), \qquad \|u - \langle u\rangle_\Omega\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega)\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Exercice 4 : inégalité de Poincaré et équation de Fokker-Planck

Dans cet exercice, on prouve des inégalités de Poincaré "à poids" qui sont adaptées à l'étude du comportement en temps grand des solutions de l'équation de Fokker-Planck.
1. (Inégalité de Poincaré-Wirtinger) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ borné et convexe. On considère $\nu \in \mathbf{P}(\Omega)$ une mesure de probabilité telle que $\nu, 1/\nu \in L^\infty(\Omega)$. Montrer qu'il existe une constante $\kappa > 0$ telle que pour toute fonction f telle que $\int_\Omega f^2\nu < \infty$ et $\int_\Omega |\nabla f|^2\,\nu < \infty$, on ait :

$$\kappa \int_\Omega |f - \langle f\rangle_\nu|^2\, \nu\, dx \leq \int_\Omega |\nabla f|^2\, \nu\, dx \quad \text{où} \quad \langle f\rangle_\nu = \int_\Omega f\, \nu\, dx.$$

En déduire que

$$\int_\Omega f^2\, \nu\, dx \leq \langle f\rangle_\nu^2 + \frac{1}{\kappa}\int_\Omega |\nabla f|^2\, \nu\, dx.$$

[Indication : écrire une formule de Taylor.]

2. Montrer qu'il existe une fonction $W \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ telle que $W \geq 1$ et qu'il existe des constantes $\theta > 0$, $b, R \geq 0$ telles que

$$(L^*W)(x) = \Delta W(x) - x \cdot \nabla W(x) \leq -\theta\, W(x) + b\, \mathbb{1}_{B(0,R)}(x), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

[Indication : chercher W sous la forme $W(x) = e^{\gamma(x)}$.]

Dans la suite de l'exercice, on considère une solution $f = f(t,x)$, $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ de l'équation de Fokker-Planck

$$\partial_t f = \Delta_x f + \mathrm{div}_x(xf), \quad f(0,\cdot) = f_0,$$

avec $f(t,\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $t \geq 0$.

3. On note $G(x) = (2\pi)^{-d/2}\, e^{-|x|^2/2}$. Vérifier que G est une solution stationnaire de l'équation.

4. a) Montrer que pour toute fonction g telle que $\int_{\mathbb{R}^n} g^2\, G\, dx < \infty$ et $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla g|^2\, G\, dx < \infty$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} g^2 G\, dx \leq C \left(\langle g \rangle_{\nu_R}^2 + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla g|^2 G\, dx \right)$$

où $\nu_R = G/(\int_{B(0,R)} G)$ et $\langle g \rangle_{\nu_R} = \int_{B(0,R)} g \nu_R\, dx$ pour une constante $C > 0$.

b) Prouver l'inégalité de Poincaré : il existe une constante $C_P > 0$ (qui ne dépend que de la dimension n) telle que pour toute fonction h telle que $\int_{\mathbb{R}^n} h^2\, G\, dx < \infty$ et $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla h|^2\, G\, dx < \infty$, on a l'estimation suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla h|^2\, G\, dx \geq C_P \int_{\mathbb{R}^n} |h - \langle h \rangle_G|^2\, G\, dx,$$

où $\langle h \rangle_G = \int_{\mathbb{R}^n} h\, G\, dx$.

5. Vérifier qu'on a la propriété suivante (conservation de la masse) :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(t,x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f_0(x)\, dx, \quad \forall\, t \geq 0.$$

6. Montrer qu'on peut écrire l'équation de Fokker-Planck sous la forme

$$\partial_t f = \mathrm{div}_x\big(G\, \nabla_x(f\, G^{-1})\big).$$

7. Montrer le résultat suivant sur le comportement asymptotique de la solution : si pour tout $t \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} f(t,x)^2 G^{-1}(x)\, dx < \infty$ et $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_x (f(t,x)/G)|^2 G(x)\, dx < \infty$,

$$\|f(t,.) - \langle f_0 \rangle\, G\|_E \leq e^{-C_P t}\, \|f_0 - \langle f_0 \rangle\, G\|_E$$

où on a noté $\langle f_0 \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f_0(x)\, dx$, $\|\cdot\|_E$ la norme de l'espace de Hilbert $E = L^2(G^{-1/2})$ définie par

$$\|f\|_E^2 = \int_{\mathbb{R}^n} f^2(x)\, G^{-1}(x)\, dx$$

et C_P la constante de Poincaré introduite à la question 2.
[Indication : remarquer qu'on peut supposer $\langle f_0 \rangle = 0$ par linéarité de l'équation.]