TD n°7. Principe du maximum, inégalité de Caccioppoli et problèmes de régularité

Exercice 1 : principe du maximum

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert.

1. Soit $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction de dérivée bornée telle que $G(0) = 0$.

a) Montrer que, pour toute $u \in H^1(\Omega)$, $G \circ u \in L^2(\Omega)$.

b) Montrer que, pour toute $u \in H^1(\Omega)$, $G \circ u \in H^1(\Omega)$ et que, pour tout $j \leq n$:

$$\partial_j(G \circ u) = (G' \circ u)\partial_j u.$$

[Indication : considérer une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $u_n \to u$ dans $H^1(\Omega)$ et telle que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers u, presque partout sur Ω.]

2. On considère l'opérateur suivant :

$$L(u) = \sum_{1\leq i,j\leq n} \partial_i(a_{ij}\partial_j u)$$

où les a_{ij} sont des fonctions de $L^\infty(\Omega)$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles qu'il existe $\lambda > 0$ vérifiant :

$$\forall\,(x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n, \qquad \lambda|\xi|^2 \leq \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j.$$

Pour toute fonction $u \in H^1(\Omega)$, on dit que $Lu = 0$ au sens faible si :

$$\forall\,\phi \in H_0^1(\Omega), \qquad \sum_{1\leq i,j\leq n} \int_\Omega a_{ij}(x)(\partial_j u(x))(\partial_i \phi(x))dx = 0.$$

On va démontrer le principe du maximum : si $u \in H^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ est telle que $Lu = 0$ au sens faible et $u \leq 0$ sur $\partial\Omega$, alors $u \leq 0$ sur tout Ω.

a) Montrer qu'il existe $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ une fonction de dérivée bornée telle que $G' > 0$ sur $]0; +\infty[$ et $G = 0$ sur $]-\infty; 0]$.

b) En considérant $\langle Lu, G \circ u\rangle$, montrer que $\int_\Omega |\nabla u|^2 G'(u) \leq 0$.

c) Conclure.

[Remarque : l'hypothèse $u \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ est superflue. La démonstration reste valable si on suppose seulement que u appartient à $H^1(\Omega)$ et que sa trace sur $\partial\Omega$ est négative.]

Exercice 2 : inégalité de Caccioppoli et régularité des fonctions harmoniques

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On rappelle que par définition, une fonction $u \in H^1(\Omega)$ à valeurs réelles est harmonique si

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi = 0, \quad \forall\,\varphi \in H_0^1(\Omega).$$

1. Supposons que $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ est harmonique et considérons deux boules concentriques $B(r) \subset\subset B(R) \subset\subset \Omega$. Montrer que pour tout $c \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_{B(r)} |\nabla u|^2\,dx \leq \frac{16}{(R-r)^2} \int_{B(R)\setminus B(r)} |u-c|^2\,dx.$$

[Indication : introduire $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ telle que $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta = 1$ sur $B(r)$ et $|\nabla \eta| \leq 2/(R-r)$.]
2. Considérons une boule $B(R) \subset\subset \Omega$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante $K(R,k)$ telle que pour toute $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ vérifiant $\Delta u = 0$, on a :

$$\int_{B(R/2)} |\nabla^k u|^2 \, dx \leq K(R,k) \int_{B(R)} u^2 \, dx.$$

3. (Théorème de Weyl) Montrer que si $u \in H^1(\Omega)$ est harmonique, alors $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.
[Indication : introduire une approximation de l'identité.]

Exercice 3 : inégalité de Caccioppoli et régularité des solutions de $Lu = f$
Soient $A = (a_{ij}(x)) \in L^\infty(\Omega, \mathcal{M}_d(\mathbb{R}))$ une fonction à valeurs matricielles et $\alpha > 0$ tels que :

$$\forall\, x \in \Omega, \forall\, \xi \in \mathbb{R}^d, \qquad \alpha|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\xi_i\xi_j.$$

Soient $b \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$ et $c \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. On considère l'opérateur linéaire défini par :

$$\begin{aligned} Lu &= -\mathrm{div}(A(x)\nabla u) + b(x).\nabla u + c(x)u \\ &= -\sum_{i,j=1}^d \partial_{x_i}(a_{ij}(x)\partial_{x_j} u) + \sum_{i=1}^d b_i(x)\partial_{x_i} u + c(x)u. \end{aligned}$$

Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $u \in H^1(\Omega)$ telles que $Lu = f$ au sens des distributions. Soit $\Omega' \subset \Omega$ un ouvert borné tel que $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Montrer que :

$$\int_{\Omega'} |\nabla u|^2 dx \leq C \int_\Omega (u^2 + f^2) dx.$$

[Indication : on pourra utiliser comme fonction test $\eta^2 u$ où $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ et vaut 1 sur Ω'.]

Exercice 4 : inégalité de Caccioppoli et régularité des solutions de div$(A\nabla u) = 0$
Dans tout l'exercice, on note $u_B = 1/|B| \int_B u(y)\, dy$ pour $B \subset \mathbb{R}^n$ borné et $B(r)$ la boule de centre 0 et de rayon r pour tout $r > 0$.
Soit $R > 0$. On suppose que $u \in H^1(B(R))$ vérifie $\mathrm{div}(A\nabla u) = 0$ où A est une matrice à coefficients bornés satisfaisant :

$$\forall\, x \in \Omega, \forall\, \xi \in \mathbb{R}^d, \qquad \alpha|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\xi_i\xi_j$$

où $\alpha > 0$.
1. Soit $0 < r \leq R$.
a) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de r telle que

$$\forall\, \eta \in \mathcal{C}_c^\infty(B(r)), \quad \int_{B(r)} \eta^2 |\nabla u|^2 \, dx \leq C \int_{B(r)} |u|^2 |\nabla \eta|^2 \, dx.$$

b) En déduire qu'il existe une constante $C' > 0$ indépendante de r telle que

$$\int_{B(r/2)} |\nabla u|^2 \, dx \leq \frac{C'}{r^2} \int_{B(r)\setminus B(r/2)} |u|^2 \, dx$$

puis que

$$\int_{B(r/2)} |\nabla u|^2 \, dx \leq \frac{C'}{r^2} \int_{B(r)\setminus B(r/2)} |u - u_{B(r)\setminus B(r/2)}|^2 \, dx.$$

2. Montrer qu'il existe une constante c telle que pour tout $r > 0$, on a

$$\int_{B(r)\setminus B(r/2)} |u - u_{B(r)\setminus B(r/2)}|^2 \, dx \leq cr^2 \int_{B(r)\setminus B(r/2)} |\nabla u|^2 \, dx.$$

[Indication : on pourra utiliser l'inégalité de Poincaré-Sobolev qui dit que si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$, alors il existe une constante $C(\Omega)$ telle que

$$\forall\, u \in H^1(\Omega), \quad \|u - u_\Omega\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

On pourra également introduire $\widetilde{u}(x) = u(rx)$.]
De la même manière on pourrait montrer qu'il existe une constante c telle que pour tout $r > 0$, on a

$$\int_{B(r)} |u - u_{B(r)}|^2 \, dx \leq cr^2 \int_{B(r)} |\nabla u|^2 \, dx.$$

3. En déduire qu'il existe une constante $\theta > 0$ telle que

$$\int_{B(r/2)} |\nabla u|^2 \, dx \leq \frac{\theta}{1+\theta} \int_{B(r)} |\nabla u|^2 \, dx.$$

4. Montrer que si $f :]0, R] \to \mathbb{R}$ est une fonction croissante qui vérifie $f(r/2) \leq (1/2)^\alpha f(r)$ pour tout $r \in]0, R]$, alors $f(r) \leq 2^\alpha (r/R)^\alpha f(R)$ pour tout $r \in [0, R]$.
5. Montrer qu'il existe deux constantes C, α avec $\alpha > 0$ telles que pour tout $0 < r \leq R$,

$$\int_{B(r)} \left|u(x) - u_{B(r)}\right|^2 \, dx \leq C r^{2+\alpha} \int_{B(R)} |\nabla u|^2.$$

Exercice 5 : régularité pour l'équation de Kolmogorov

Une distribution $f = f(t, x, v)$ à valeurs réelles définie pour $(t, x, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S} \times \mathbb{R}$ où $\mathbb{S}$ est la sphère de dimension 1, est une solution de l'équation de Kolmogorov associée à la donnée initiale $f_0 = f_0(x, v)$, $(x, v) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}$ si elle satisfait :

$$\partial_t f = Lf, \quad f_{|t=0} = f_0 \qquad \text{où} \quad Lf = -v\partial_x f + \partial_{vv} f.$$

On introduit l'espaces $L^2 = L^2(\mathbb{S} \times \mathbb{R})$ et l'espace $H^1 = H^1(\mathbb{S} \times \mathbb{R})$ associé à la norme

$$\|f\|_{H^1}^2 = \|f\|_{L^2}^2 + \|\partial_v f\|_{L^2}^2 + \|\partial_x f\|_{L^2}^2.$$

On suppose que pour $f_0 \in \mathcal{S}$, il existe une solution associée $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{S})$. On introduit une fonctionnelle $\mathcal{F}$ définie sur $[0,1] \times H^1$ par

$$\mathcal{F}(t,h) = A\|h\|_{L^2}^2 + Bt\|\partial_v h\|_{L^2}^2 + Ct^2\langle \partial_x h, \partial_v h\rangle_{L^2} + t^3\|\partial_x h\|^2, \quad (t,h) \in [0,1] \times H^1$$

où A, B et C sont des constantes strictement positives à déterminer.
1. Montrer que si $C \leq \sqrt{B}$, on a $\mathcal{F}(t,h) \geq A\|h\|^2 + (Bt/2)\|\partial_v h\|^2 + (t^3/2)\|\partial_x h\|^2$ pour tout $t \in [0,1]$ et tout $h \in H^1$.
2. Montrer qu'on peut choisir les constantes A, B et C respectant la condition $C \leq \sqrt{B}$ telles que si f est solution de l'équation de Kolmogorov associée à une donnée initiale $f_0 \in \mathcal{S}$ alors en notant $f_t = f(t,\cdot,\cdot)$,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(t,f_t) \leq 0, \quad \forall\, t \in [0,1].$$

3. Montrer qu'on a les estimations suivantes pour $f_0 \in \mathcal{S}$:

$$\|\partial_v f_t\|_{L^2} \leq \frac{C'}{\sqrt{t}}\|f_0\|_{L^2} \quad \text{et} \quad \|f_t\|_{H^1} \leq \frac{C'}{t^{3/2}}\|f_0\|_{L^2}, \quad \forall\, t \in]0,1]$$

où C' est une constante strictement positive. On peut déduire de ce résultat que si $f_0 \in L^2$, la solution associée f satisfait $f_t \in H^1$ pour tout $t \in]0,1]$ mais on ne le démontrera pas ici.

Exercice 6 : régularité et comportement en temps grand pour l'équation de Fokker-Planck
Une distribution $f = f(t,x,v)$ à valeurs réelles définie pour $(t,x,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S} \times \mathbb{R}$ où $\mathbb{T}$ est la sphère de dimension 1, est une solution de l'équation de Fokker-Planck associée à la donnée initiale $f_0 = f_0(x,v)$, $(x,v) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}$ si elle satisfait :

$$(1) \qquad \partial_t f = Lf, \quad f_{|t=0} = f_0 \qquad \text{où} \quad Lf = -v\partial_x f + (-v + \partial_v)\partial_v f.$$

Soit μ la gaussienne définie par $\mu(v) = e^{-v^2/2}/\sqrt{2\pi}$. On considère les espaces $\mathcal{L}^2$ et $\mathcal{H}^1$ définis par $\mathcal{L}^2 = L^2(dx\,d\mu)$ et $\mathcal{H}^1 = H^1(dx\,d\mu)$ où $d\mu = \mu\,dx$. On note $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{L}^2}$ le produit scalaire défini sur $\mathcal{L}^2$ par $(f,g)_{\mathcal{L}^2} = \int_{\mathbb{S}\times\mathbb{R}} fg\,d\mu\,dx$.
On suppose que si $f_0 \in \mathcal{S}$, il existe une solution associée $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{S})$.
1. a) Montrer que f est une solution de l'équation de Fokker-Planck (1) si et seulement si $F = \mu + \mu f$ est solution de l'équation de Fokker-Planck classique :

$$\partial_t F + v\partial_x F = \partial_v(\partial_v F + vF), \quad F_{|t=0} = \mu + \mu f_0.$$

b) Montrer que si f_0 satisfait $\int_{\mathbb{S}\times\mathbb{R}} f_0\,d\mu\,dx = 0$ et f est une solution de (1) associée à f_0, alors pour tout $t \geq 0$, $\int_{\mathbb{S}\times\mathbb{R}} f_t\,d\mu\,dx = 0$ où on a noté $f_t(x,v) = f(t,x,v)$.
2. Soit $\mathcal{G}$ la fonctionnelle définie sur $\mathcal{H}^1$ définie par

$$\mathcal{G}(h) = A\|h\|_{\mathcal{L}^2}^2 + B\|\partial_v h\|_{\mathcal{L}^2}^2 + C(\partial_v h, \partial_x h)_{\mathcal{L}^2} + \|\partial_x h\|_{\mathcal{L}^2}^2$$

pour des constantes strictement positives A, B et C à déterminer.
a) Montrer qu'il existe deux constantes $D_1 > 0$ et $D_2 > 0$ telles que $D_1\|\cdot\|_{\mathcal{H}^1}^2 \leq \mathcal{G} \leq D_2\|\cdot\|_{\mathcal{H}^1}^2$ si $C \leq \sqrt{B}$.

b) Montrer que si $f_0 \in \mathcal{S}$, pour un bon choix de constantes A, B et C telles que $C \leq \sqrt{B}$, on a :

$$\frac{d}{dt}\mathcal{G}(f_t) \leq -\frac{C}{2}(\|\partial_v f_t\|_{\mathcal{L}^2}^2 + \|\partial_x f_t\|_{\mathcal{L}^2}^2).$$

si f est une solution de l'équation de Fokker-Planck (1) et l'où on a noté $f_t = f(t, \cdot, \cdot)$.
c) On rappelle l'inégalité de Poincaré suivante : il exite une constante $C_P > 0$ telle que pour toute $h \in \mathcal{H}^1$ de moyenne nulle (i.e. $\int_{\mathbb{S}\times\mathbb{R}} h\, d\mu\, dx = 0$), on a :

$$C_P\|f\|^2 \leq \|\partial_v f\|^2 + \|\partial_x f\|^2.$$

Montrer qu'il existe une constante $\kappa > 0$ telle que si la donnée initiale est de moyenne nulle : $\int_{\mathbb{S}\times\mathbb{R}} f_0\, d\mu\, dx = 0$, alors la solution f_t associée à f_0 vérifie

$$\forall\, t > 0, \quad \mathcal{G}(f_t) \leq e^{-\kappa t}\mathcal{G}(f_0).$$

d) En déduire qu'il existe une constante $C_0 > 0$ telle que si la donnée initiale f_0 est de moyenne nulle ($\int_{\mathbb{S}\times\mathbb{R}} f_0\, d\mu\, dx = 0$), alors la solution f_t associée à f_0 vérifie

$$\forall\, t \geq 0, \quad \|f_t\|_{\mathcal{H}^1} \leq C_0\, e^{-\kappa t}\|f_0\|_{\mathcal{H}^1}.$$

3. De la même manière qu'à l'exercice 4, on pourrait montrer qu'il existe une constante $C_1 > 0$ telle que si f_t est la solution de (1) associée à $f_0 \in \mathcal{L}^2$, alors

$$\|f_t\|_{\mathcal{H}^1} \leq \frac{C_1}{t^{3/2}}\|f_0\|_{\mathcal{L}^2}, \quad \forall\, t \in]0, 1].$$

On admet que si g_t est la solution associée à la donnée initiale $g_0 = f_1$, alors on a $g_{t-1} = f_t$ pour tout $t \geq 1$. Montrer qu'il existe une constante $C_2 > 0$ telle que si la donnée initiale f_0 est de moyenne nulle ($\int_{\mathbb{S}\times\mathbb{R}} f_0\, d\mu\, dx = 0$), alors la solution f_t associée à f_0 vérifie

$$\forall\, t > 0, \quad \|f_t\|_{\mathcal{H}^1} \leq C_2\, \frac{e^{-\kappa t}}{\min(t^{3/2}, 1)}\|f_0\|_{\mathcal{L}^2}.$$

[Remarque : ce résultat de convergence vers 0 couplé avec un gain de régularité sur f se traduit sur les solutions de l'équation de Fokker-Planck classique en un résultat de convergence vers l'équilibre couplé avec un gain de régularité.]