TD n°8. Théorème de De Giorgi

Dans tout le TD, n désigne un entier naturel non nul et on note B_r la boule de $\mathbb{R}^n$ centrée en 0 et de rayon $r > 0$.

Exercice 1 : estimation $L^2 - L^\infty$

Le but de la première partie de cet exercice est de donner une autre preuve de l'estimation $L^2 - L^\infty$ que celle donnée dans le cours. On considère la matrice de fonctions mesurables $A(x) = (a_{ij}(x))_{1\le i,j\le n}$ définie pour $x \in B_1$ et vérifiant la condition d'ellipticité suivante :

$$\lambda|\xi|^2 \le \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j, \quad \forall\,(x,\xi) \in B_1 \times \mathbb{R}^n$$

ainsi que :

$$\sup_{1\le i,j\le n} \|a_{ij}\|_{L^\infty(B_1)} \le \Lambda$$

pour des constantes λ et Λ strictement positives. On introduit l'opérateur L d'ordre deux défini par $Lu = \mathrm{div}(A(x)\nabla u)$.

Le résultat que l'on veut démontrer est le suivant :

Théorème. *Il existe une constante δ dépendant uniquement de λ, Λ et n telle que pour toute solution faible u de $Lu = 0$ dans B_1, on a :*

$$\|u_+\|_{L^2(B_1)} \le \delta \Rightarrow \|u_+\|_{L^\infty(B_{1/2})} \le 1/2$$

où on a noté $u_+ = \sup(0, u)$.

On rappelle deux résultats cruciaux pour la démonstration.

Lemme 1.1 (Inégalité de Sobolev)**.** *On pose $p = (2n)/(n-2)$. Il existe une constante $C_1 > 0$ dépendant uniquement de n telle que pour toute $v \in H^1(B_1)$, on a*

$$\|v\|_{L^p(B_1)} \le C_1\|\nabla v\|_{L^2(B_1)}.$$

Lemme 1.2 (Inégalité de Caccioppoli pour les sous-solutions)**.** *Soient u une solution faible de $Lu = 0$ dans B_1 et $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(B_1)$. Alors, on a :*

$$\int_{B_1} |\nabla(\varphi u_+)|^2\,dx \le C_2\,\|\nabla\varphi\|_\infty^2 \int_{B_1\cap supp(\varphi)} u_+^2\,dx$$

où $C_2 > 0$ est une constante dépendant uniquement de λ, Λ et n.

1. On introduit une famille de boules $(\tilde{B}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ centrées en 0 et de rayon $(1 + 2^{-k})/2$. On remarque que $\tilde{B}_0 = B_1$ et $\tilde{B}_k$ “converge” vers $B_{1/2}$ lorsque $k \to \infty$. On considère ensuite une suite $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de “niveaux d'énergie” définie par $C_k = (1 - 2^{-k})/2$ (allant de 0 à 1/2).

On définit la suite d'énergies au dessus du niveau C_k dans la boule $\tilde{B}_k$:

$$U_k = \int_{\tilde{B}_k} |u_k(x)|^2\,dx \quad \text{où} \quad u_k = (u - C_k)_+.$$

a) On introduit les fonctions de troncature $\phi_k \in \mathcal{C}_0^\infty(B_1)$ comprises entre 0 et 1, vérifiant

$$\begin{cases} \phi_k = 1 & \text{sur} \quad \tilde{B}_k \\ \phi_k = 0 & \text{sur} \quad \tilde{B}_{k-1}^c \end{cases}$$

et satisfaisant $|\nabla \phi_k| \leq C_0 2^k$ pour une certaine constante fixée $C_0 > 0$. Montrer que pour tout $k \geq 1$,

$$\|\phi_{k+1} u_{k+1}\|_{L^p}^2 \leq C^k U_k \quad \text{où} \quad p = \frac{2n}{n-2}$$

où C est une constante strictement supérieure à 1.
b) Prouver qu'il existe des constantes $C > 1$ (éventuellement différente de celle de la question précédente) et $\beta > 1$ telles que pour tout $k \geq 2$,

$$U_{k+1} \leq C^k U_k^\beta.$$

2. Montrer que si U_0 est assez petit, on a pour tout $k \geq 2$:

$$C^k U_k^{\beta-1} \leq \frac{1}{(2C)^{\frac{1}{\beta-1}}}$$

où C est la constante de la question 1.b).
3. Conclure la preuve du théorème.

Exercice 2 : lemme d'oscillation et théorème de De Giorgi
On considère la matrice de fonctions mesurables $A(x) = (a_{ij}(x))_{1 \leq i,j \leq n}$ définie pour $x \in B_2$ et vérifiant la condition d'ellipticité suivante :

$$\lambda |\xi|^2 \leq \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j, \quad \forall\, (x, \xi) \in B_2 \times \mathbb{R}^n$$

ainsi que :

$$\sup_{1 \leq i,j \leq n} \|a_{ij}\|_{L^\infty(B_2)} \leq \Lambda$$

pour des constantes λ et Λ strictement positives. On introduit l'opérateur L d'ordre deux défini par $Lu = \mathrm{div}(A(x) \nabla u)$. On suppose que $Lu = 0$ pour une certaine fonction $u \in H^1(B_2)$.
On rappelle les résultat suivants :

Théorème 2.1 (Inégalité de Caccioppoli et estimation $L^2 - L^\infty$ pour les sous-solutions)**.** *Soient $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ et $\rho > 0$ tels que $\overline{B(x_0, r)} \subset B(x_0, \rho) \subset B_2$. Alors il existe $c > 0$ tel que, pour toute sous-solution positive $v \in H^1(B_2)$ de $Lv = 0$:*

$$\sup_{B(x_0,r)} v \leq c \left(\int_{B(x_0,\rho)} v^2 \right)^{1/2},$$

$$\left(\int_{B(x_0,r)} |\nabla v|^2 \right)^{1/2} \leq c \left(\int_{B(x_0,\rho)} v^2 \right)^{1/2}.$$

Le but de l'exercice est de donner du théorème suivant une démonstration différente de celle du cours.

Théorème 2.2. *Il existe $\alpha > 0$ indépendante de u telle que u est α-Hölder sur B_1.*

On va pour cela démontrer le lemme :

Lemme 2.3 (Lemme d'oscillation)**.** *Il existe $\sigma \in]0;1[$ indépendante de u telle que, pour tout $x_0 \in B_1$ et tout $r > 0$ tel que $B(x_0, 4r) \subset B_2$, alors :*

$$\sup_{B(x_0,r)} u - \inf_{B(x_0,r)} u \leq \sigma \left(\sup_{B(x_0,2r)} u - \inf_{B(x_0,2r)} u \right)$$

1. Montrer pourquoi le lemme entraîne le résultat.
2. Dans cette question, on suppose que $u \in H^1(B_1)$ est une fonction qui vérifie l'inégalité suivante, pour un $c_0 > 0$ fixé :

$$\int_{B_1} |\nabla u|^2 \leq c_0.$$

On définit :

$$A = u^{-1}(]-\infty;0]), \quad C = u^{-1}(]0;1[), \quad D = u^{-1}([1;+\infty[).$$

a) On pose $\bar{u} = \sup(0, \inf(u,1))$. On remarque que $\nabla \bar{u} = (\nabla u)\, \mathbb{1}_{0<u<1}$ presque partout. Soit $x_0 \in A$. Montrer que :

$$|D| \leq \int_{B_1} \int_0^1 |\nabla \bar{u}((1-t)x_0 + tx)|\, |x - x_0| dt\, dx.$$

b) Montrer que :

$$|D| \leq c_n \int_{B_1} \frac{|\nabla \bar{u}(y)|}{|x_0 - y|^{n-1}} dy$$

puis

$$|A||D| \leq c_n \int_{B_1} |\nabla \bar{u}|(y) \left(\int_A \frac{dx}{|x-y|^{n-1}} \right) dy$$

pour une constante c_n ne dépendant que de la dimension n.
c) Montrer qu'il existe $c'_n > 0$ tel que, pour tout $x \in B_1$ et tout $E \subset B_1$:

$$\int_E \frac{dy}{|x-y|^{n-1}} \leq c'_n |E|^{1/n}.$$

d) Montrer qu'il existe $c''_n > 0$ tel que

$$c_0 |C| \geq c''_n \left(|D||A|^{1-1/n} \right)^2.$$

3. Soit $u \in H^1(B_{3/2})$ une sous-solution de $Lu = 0$ (c'est-à-dire qu'on a $Lu \geq 0$). On suppose $0 \leq u \leq 1$. Soit $\mu = |B_1 \cap u^{-1}(\{0\})|$. On suppose $\mu > 0$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $v_k = 2^k \max(0, u - (1 - 2^{-k}))$.

a) Montrer qu'il existe $c_0 > 0$ indépendante de u telle que, pour tout k :

$$\int_{B_1} |\nabla v_k|^2 \leq c_0.$$

b) En appliquant le résultat de la question 2. à la fonction $2\min(v_k, 1/2)$, montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$|\{x \in B_1 \text{ tq } v_k(x) > 0, v_{k+1}(x) = 0\}| \geq c\, |\{x \in B_1 \text{ tq } v_{k+1}(x) > 0\}|^2$$

où c est une constante qui ne dépend que de n, μ et c_0.

c) Montrer que, pour tout $\delta > 0$, il existe k_0 ne dépendant que de n, μ, δ et c_0 tel que :

$$|\{x \in B_1 \text{ tq } v_{k_0}(x) > 0\}| \leq \delta.$$

d) En déduire qu'il existe $\eta \in]0; 1[$ ne dépendant pas de u tel que :

$$\sup_{B_{1/2}} u \leq \eta.$$

[Indication : utiliser le fait que $\int_{B_1} v_{k_0}^2 \leq |\{x \in B_1 \text{ tq } v_{k_0}(x) > 0\}|$.]

4. Démontrer le lemme.