TD N°9.

Exercice 1 : estimation $L^2 - L^\infty$

On considère l'équation

$$\partial_t u - \operatorname{div}(A(t,x)\nabla_x u) = 0 \tag{1}$$

où $A(t,x) = (a_{ij}(t,x))_{1\le i,j\le n}$ vérifie

$$\lambda|\xi|^2 \le \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j, \quad \forall\,(t,x,\xi) \in \,]-1,0[\,\times B_1 \times \mathbb{R}^n$$

ainsi que :

$$\sup_{1\le i,j\le n} \|a_{ij}\|_{L^\infty(]-1,0[\times B_1)} \le \Lambda$$

pour des constantes λ et Λ strictement positives. Pour tout réel $r > 0$, B_r désigne la boule de centre 0 et de rayon r et on définit $Q_r =]-r,0[\,\times B_r$.

Le résultat que l'on veut montrer dans cet exercice est le suivant :

Théorème. *Il existe une constante δ dépendant uniquement de λ, Λ et n telle que pour toute solution faible u de (1) dans Q_1, on a :*

$$\int_{Q_1} |u_+|^2\,dx\,dt \le \delta \quad \Rightarrow \quad u_+(t,x) \le 1/2 \quad \textit{sur} \quad Q_{1/2}$$

où on a noté $u_+ = \sup(0,u)$.

On introduit une suite de temps $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par

$$T_k = -\frac{1}{2}(1+2^{-k})$$

et une suite de boules $(\tilde{B}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ centrées en 0 et de rayon $(1+2^{-k})/2$. On remarque que $\tilde{B}_0 = B_1$ et $\tilde{B}_k$ "converge" vers $B_{1/2}$ lorsque $k \to \infty$. On définit la suite de cylindres $(\tilde{Q}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par

$$\tilde{Q}_k =]T_k, 0[\,\times \tilde{B}_k.$$

On considère ensuite une suite $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de "niveaux d'énergie" définie par $C_k = (1-2^{-k})/2$ (allant de 0 à 1/2). Puis on définit la suite d'énergies au dessus du niveau C_k dans le cylindre $\tilde{Q}_k$:

$$U_k = \int_{\tilde{Q}_k} |u_k(t,x)|^2\,dx\,dt \quad \text{où} \quad u_k = (u - C_k)_+.$$

On introduit les fonctions de troncature $\phi_k \in \mathcal{C}_0^\infty(B_1)$ comprises entre 0 et 1, vérifiant

$$\begin{cases} \phi_k = 1 & \text{sur} \quad \tilde{B}_k \\ \phi_k = 0 & \text{sur} \quad \tilde{B}_{k-1}^c \end{cases}$$

et satisfaisant $|\nabla \phi_k| \leq C_0 2^k$ pour une certaine constante fixée $C_0 > 0$.
1. a) Montrer qu'il existe des constantes C_1 et $C_2 > 0$ (ne dépendant pas de u) telle que si $T_k \leq s \leq T_{k+1} \leq t \leq 0$,

$$\left(\int \phi_{k+1}^2 u_{k+1}^2 \, dx\right)(t) + C_1 \int_s^t \left(\int |\nabla(\phi_{k+1} u_{k+1})|^2 \, dx\right)(\tau) \, d\tau$$
$$\leq \left(\int \phi_{k+1}^2 u_{k+1}^2 \, dx\right)(s) + C_2 \int_s^t \left(\int |\nabla \phi_{k+1}|^2 u_{k+1}^2 \, dx\right)(\tau) \, d\tau.$$

b) Montrer que

$$\mathcal{E}_{k+1} = \sup_{T_{k+1} \leq t \leq 0} \left(\int (\phi_{k+1} u_{k+1})^2 \, dx\right) + \int_{T_{k+1}}^0 \int_{B_1} |(\nabla \phi_{k+1}) u_{k+1}|^2 \, dx \, dt \leq C^k U_k$$

pour une constante $C > 1$.
On remarque que $\mathcal{E}_{k+1}$ contrôle $\phi_{k+1} u_{k+1}$ dans $L^\infty(T_{k+1}, 0; L^2(B_1))$ et dans $L^2(T_{k+1}, 0; L^{2n/(n-2)}(B_1))$.
On admet qu'on peut alors prouver que

$$\|\phi_{k+1} u_{k+1}\|^2_{L^{2(2+n)/n}(\tilde{Q}_{k+1})} \leq C_3 \mathcal{E}_{k+1}.$$

pour une constante $C_3 > 0$.
2. En déduire que

$$U_{k+1} \leq C^k U_k^{1+2/(2+n)}.$$

Comme dans l'exercice 1. du TD 8, on peut montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que si $U_0 \leq \delta$ alors $U_k \to 0$ lorsque k tend vers l'infini. On conclut alors que

$$u_+ \leq 1/2 \quad \text{sur} \quad \tilde{Q}_\infty = (-1/2, 0) \times B_{1/2}.$$

Exercice 2 : régularité elliptique

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $A \in \mathcal{C}^{0,1}(\Omega, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ telle que, pour un certain $\lambda > 0$:

$$\forall x \in \Omega, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \qquad \langle A(x)\xi, \xi \rangle \geq \lambda |\xi|^2.$$

Pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, on note $\tau_h u(x) = u(x+h)$ et $\Delta_h u(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{|h|}$. Soient Ω' et Ω'' tels que $\overline{\Omega'} \subset \Omega''$ et $\overline{\Omega''} \subset \Omega$.
1. Rappeler pourquoi, pour $u \in H^1(\Omega)$ et h assez petit :

$$\|\tau_h u - u\|_{L^2(\Omega'')} \leq |h| \, \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

2. Soit $f \in L^2(\Omega)$. Soit $u \in H^1(\Omega)$ une solution faible de $-\mathrm{div}(A \nabla u) = f$.
Montrer que pour tout h assez petit et $\phi \in H^1(\Omega)$, à support dans Ω'', on a :

$$\int_\Omega \langle (\tau_h A) \nabla(\Delta_h u), \nabla \phi \rangle = \int_\Omega (\Delta_h f) \phi - \int_\Omega \langle (\Delta_h A) \nabla u, \nabla \phi \rangle .$$

3. En s'inspirant de la preuve de l'inégalité de Cacciopoli, montrer que :

$$\int_{\Omega'} |\nabla \Delta_h u|^2 \leq C \int_{\Omega} (u^2 + f^2).$$

[Indication : on pourra utiliser un résultat du TD 7 qui dit qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $\int_{\Omega''} |\nabla u|^2 \leq c \int_{\Omega} (u^2 + f^2)$.]
4. En déduire :

$$\int_{\Omega'} |\nabla^2 u|^2 \leq C' \int_{\Omega} (u^2 + f^2).$$

Exercice 3 : estimation des dérivées d'une fonction harmonique
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soit $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ une fonction harmonique dans Ω.
1. Montrer que si $\overline{B}(x_0, r) \subset \Omega$, alors, pour tout $j = 1, ..., n$:

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0) = \frac{1}{|B(x_0, r)|} \int_{\partial B(x_0, r)} u(y) \nu_j(y) dy$$

où ν_j est la j-ième coordonnée du vecteur normal unitaire à $\partial B(x_0, r)$.
2. On suppose que $m \leq u \leq M$ sur $\partial B(x_0, r)$ pour deux constantes m et M. Montrer que :

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0) \right| \leq C_n \frac{M - m}{r}$$

où C_n est une constante qui dépend de la dimension.
3. En déduire que si $m \leq u \leq M$ sur Ω, alors :

$$\forall x \in \Omega, \qquad \|\nabla u(x)\| \leq C_n' \frac{M - m}{d(x, \partial\Omega)}.$$

4. Montrer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions harmoniques dans Ω qui est uniformément bornée, alors on peut en extraire une sous-suite qui converge uniformément, ainsi que ses dérivées, sur tout compact de Ω, vers une fonction harmonique dans Ω.