Corrigé n°1

Exercice 1 : équation de transport linéaire avec donnée initiale non régulière

1. Il suffit de faire des intégrations par parties en utilisant que φ est à support compact, ce qui annule des termes de bord et nous autorise à appliquer le théorème de Fubini.

2. Soit $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Soient aussi $T > 0$ et $R > 0$ tels que $\operatorname{supp} \psi \subset [0, T] \times \overline{B}(0, R)$. On utilise l'indication de l'énoncé et on considère $\varphi_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ définie par $\varphi_0(x) = -\int_0^T \psi(s, x + cs)\, ds$. Alors φ définie comme solution de l'équation de transport

$$\begin{cases} \partial_t \varphi(t,x) + c \cdot \nabla_x \varphi(t,x) = \psi(t,x) & \text{sur} \quad \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^n \\ \varphi(\cdot, 0) = \varphi_0, \end{cases}$$

est donnée par

$$\varphi(t,x) = \varphi_0(x - ct) + \int_0^t \psi(s, x - c(t-s))\, ds = \int_T^t \psi(s, x - c(t-s))\, ds.$$

En étudiant séparément les cas $t \le T$ et $t > T$, on peut montrer que $\operatorname{supp} \varphi \subset [0, T] \times \overline{B}(0, R + \|c\| T)$.
Revenons à l'unicité. Par linéarité de l'équation, il suffit de montrer que si $u_0 = 0$ alors $u = 0$. On considère donc une solution faible u associée à la donnée initiale $u_0 = 0$. Par définition d'une solution faible et en utilisant que φ définie précédemment est bien une fonction test, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n} u(t,x) \big[\partial_t \varphi(t,x) + c \cdot \nabla_x \varphi(t,x)\big]\, dx\, dt = 0,$$

ce qui se réécrit, d'après la définition de φ :

$$\int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n} u(t,x) \psi(t,x)\, dx\, dt = 0.$$

La fonction ψ étant quelconque, on en déduit que $u = 0$ presque partout.

3. La solution faible du problème est donnée par

$$u(t,x) = H(x - ct) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < ct \\ 1 & \text{si} \quad x \ge ct. \end{cases}$$

En effet, si u est définie ainsi, pour $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n} H(x - ct) \big[\partial_t \varphi(t,x) + c\, \partial_x \varphi(t,x)\big]\, dx\, dt + \int_{\mathbb{R}} H(x) \varphi(0,x)\, dx \\
&= \int_{\{(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R},\, x \ge ct\}} \big[\partial_t \varphi(t,x) + c\, \partial_x \varphi(t,x)\big]\, dx\, dt + \int_{\mathbb{R}^+} \varphi(0,x)\, dx \\
&= \int_{\{(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,\, x \ge ct\}} \big[\partial_t \varphi(t,x) + c\, \partial_x \varphi(t,x)\big]\, dx\, dt + \int_{\mathbb{R}^+} \varphi(0,x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^+} \int_{t=0}^{x/c} \partial_t \varphi(t,x)\, dt\, dx + c \int_{\mathbb{R}^+} \int_{x=ct}^{+\infty} \partial_x \varphi(t,x)\, dx\, dt + \int_{\mathbb{R}^+} \varphi(0,x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^+} \varphi(x/c, x)\, dx - \int_{\mathbb{R}^+} \varphi(0,x)\, dx - c \int_{\mathbb{R}^+} \varphi(t, ct)\, dt + \int_{\mathbb{R}^+} \varphi(0,x)\, dx = 0.
\end{aligned}$$

Exercice 2 : une équation de transport non linéaire

1. a) La fonction ϕ_s est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $s \in [0, T[$,

$$\phi_s'(z) = 1 + s u_0'(z) > 0, \quad \forall\, z \in \mathbb{R}.$$

En effet, pour tout z, on a $u_0'(z) \geq -\max(0, -u_0'(z)) \geq -1/T$. De plus, comme u_0 est bornée, on a $\phi_s(z) \xrightarrow[z\to\pm\infty]{} \pm\infty$. Donc φ_s est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ su $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ ainsi que sa réciproque.
b) On applique le théorème des fonctions implicites à l'équation $F(t, x, z) = 0$. L'unique solution de cette équation étant $z = \phi_t^{-1}(x)$, on en conclut que l'application Φ définie par

$$\Phi(t, x) = \phi_t^{-1}(x), \quad \forall\, (t, x) \in [0, T[\, \times \mathbb{R}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, T[\, \times \mathbb{R}$.
c) De plus, en dérivant la relation $F(t, x, \Phi(t, x)) = 0$ par rapport à t puis par rapport à x, on a :

$$\begin{aligned}
\partial_t \Phi(t, x) &= -\frac{u_0(\Phi(t, x))}{1 + t u_0'(\Phi(t, x))}, \\
\partial_x \Phi(t, x) &= \frac{1}{1 + t u_0'(\Phi(t, x))}.
\end{aligned}$$

Donc la fonction u définie par $u(t, x) = u_0(\Phi(t, x))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, T[\, \times \mathbb{R}$ par composition et

$$\begin{aligned}
\partial_t u(t, x) &= u_0'(\Phi(t, x)) \partial_t \Phi(t, x) = -\frac{u_0'(\Phi(t, x)) u_0(\Phi(t, x))}{1 + t u_0'(\Phi(t, x))}, \\
\partial_x u(t, x) &= \frac{u_0'(\Phi(t, x))}{1 + t u_0'(\Phi(t, x))}.
\end{aligned}$$

On peut ainsi vérifier que

$$\partial_t u(t, x) + u_0(\Phi(t, x)) \partial_x u(t, x) = 0.$$

Comme $u_0(\Phi(t, x)) = u(t, x)$, on en déduit que u est bien solution de (2) puisque $\Phi(0, x) = \phi_0^{-1}(x) = x$, ce qui permet de vérifier également la condition initiale.
2. Soit φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Le calcul montre que

$$\int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} \left[v_p(t, x) \partial_t \varphi(t, x) + \frac{1}{2} v_p^2(t, x) \partial_x \varphi(t, x) \right] dx\, dt = 0.$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} \frac{1}{2} v_p^2(t, x) \partial_x \varphi(t, x)\, dx\, dt &= \int_0^{+\infty} \int_{-pt}^{pt} \frac{1}{2} v_p^2(t, x) \partial_x \varphi(t, x)\, dx\, dt \\
&= \int_0^{+\infty} \int_{-pt}^{pt} 2p^2 \partial_x \varphi(t, x)\, dx\, dt \qquad (1) \\
&= 2p^2 \int_0^{+\infty} [\varphi(t, pt) - \varphi(t, -pt)]\, dx\, dt.
\end{aligned}$$

Puis,

$$\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}} v_p(t,x)\partial_t\varphi(t,x)\,dx\,dt$$
$$= \int_{-\infty}^{0}\int_0^{+\infty} v_p(t,x)\partial_t\varphi(t,x)\,dt\,dx + \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} v_p(t,x)\partial_t\varphi(t,x)\,dt\,dx.$$

Si $x>0$, $v_p(t,x)=0$ si $t<x/p$ et $v_p(t,x)=2p$ si $t\geq x/p$ donc

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} v_p(t,x)\partial_t\varphi(t,x)\,dt\,dx = 2p\int_0^{+\infty}\int_{x/p}^{+\infty}\partial_t\varphi(t,x)\,dt\,dx = -2p\int_0^{+\infty}\varphi\left(\frac{x}{p},x\right)\,dx.$$

De même, on a :

$$\int_{-\infty}^{0}\int_0^{+\infty} v_p(t,x)\partial_t\varphi(t,x)\,dt\,dx = 2p\int_{-\infty}^{0}\varphi\left(-\frac{x}{p},x\right)\,dx.$$

D'où par changement de variable

$$\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}} v_p(t,x)\partial_t\varphi(t,x)\,dx\,dt = -2p^2\int_0^{+\infty}\varphi(s,ps)\,ds + 2p^2\int_0^{+\infty}\varphi(s,-ps)\,ds. \tag{2}$$

En utilisant (1) et (2), on obtient le résultat voulu.

Exercice 3 : inégalité de Caccioppoli et régularité des fonctions harmoniques

1. Soit $c\in\mathbb{R}$. Comme suggéré dans l'énoncé, on introduit $\eta\in\mathcal{C}_c^\infty(B(R))$ telle que $0\leq\eta\leq 1$, qui vaut 1 sur $B(r)$ et telle que $|\nabla\eta|\leq 2/(R-r)$. On pose $\phi=(u-c)\eta^2\in\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Comme u est harmonique, on a $\int_\Omega \phi\,\Delta u\,dx=0$ (intégrale bien définie car ϕ est à support compact). En intégrant par parties, on a :

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\left(\eta^2\nabla u + 2(u-c)\eta\nabla\eta\right)\,dx = 0.$$

D'où

$$\begin{aligned}\int_\Omega \eta^2|\nabla u|^2\,dx &= -2\int_\Omega (u-c)\eta\nabla u\cdot\nabla\eta\,dx\\ &\leq 2\int_\Omega |u-c|\eta|\nabla u||\nabla\eta|\,dx\\ &\leq 2\left(\int_\Omega |u-c|^2|\nabla\eta|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,\eta^2\,dx\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

On en déduit en utilisant le fait que $\nabla\eta$ est à support dans $B(R)\setminus B(r)$ et $|\nabla\eta|\leq 2(R-r)$:

$$\begin{aligned}\int_{B(r)} |\nabla u|^2\,dx \leq \int_\Omega \eta^2|\nabla u|^2\,dx &\leq 4\int_\Omega |u-c|^2|\nabla\eta|^2\,dx\\ &\leq \frac{16}{(R-r)^2}\int_{B(R)\setminus B(r)} |u-c|^2\,dx.\end{aligned}$$

2. D'après la question précédente, pour tout $R' < R$, on a une estimations du type

$$\int_{B(R')} |\nabla u|^2 \, dx \leq C(R, R') \int_{B(R)} |u|^2 \, dx$$

où $C(R, R')$ est une constante strictement positive dépendant de R et R'. Si $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ est harmonique, ses dérivées le sont également. On en déduit alors que pour $R'' < R'$, on a :

$$\int_{B(R'')} |\nabla(\partial_{x_j} u)|^2 \, dx \leq C(R', R'') \int_{B(R')} |\partial_{x_j} u|^2 \, dx \leq C(R', R'')C(R, R') \int_{B(R)} |u|^2 \, dx, \quad \forall\, j = 1 \dots n.$$

On obtient le résultat voulu en itérant cet argument.

3. On introduit une approximation de l'unité $\phi_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-n}\phi(y/\varepsilon)$ où $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty$, $\phi \geq 0$, $\mathrm{supp}(\phi) \subset B(0, 1)$ et $\int_{\mathbb{R}^n} \phi \, dx = 1$. Soit $u \in H^1(\Omega)$. On pose $u_\varepsilon = u * \phi_\varepsilon$. Alors $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$ où $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)) > \varepsilon\}$. De plus, on peut montrer que u_ε est harmonique sur Ω_ε. Pour cela on considère $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega_\varepsilon)$, et on veut montrer que $\int_{\Omega_\varepsilon} \Delta u_\varepsilon \varphi \, dx = 0$ ou autrement dit que $\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla\varphi \, dx = 0$. On calcule en utilisant que $\mathrm{supp}(\phi_\varepsilon) \subset B(0, \varepsilon)$:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla\varphi \, dx &= \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\int_{B(0,\varepsilon)} \nabla_x u(x - y)\phi_\varepsilon(y) \, dy \right) \cdot \nabla\varphi(x) \, dx \\
&= \int_{B(0,\varepsilon)} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla_x u(x - y) \cdot \nabla\varphi(x) \, dx \right) \phi_\varepsilon(y) \, dy \\
&= \int_{B(0,\varepsilon)} \left(\int_{\Omega_\varepsilon - y} \nabla_x u(x) \cdot \nabla\varphi(x + y) \, dx \right) \phi_\varepsilon(y) \, dy \\
&= \int_{B(0,\varepsilon)} \left(\int_{\Omega} \nabla_x u(x) \cdot \nabla\varphi(x + y) \, dx \right) \phi_\varepsilon(y) \, dy
\end{aligned}$$

où la dernière égalité provient du fait que $\mathrm{supp}\varphi \subset \Omega_\varepsilon$ et que pour tout $y \in B(0, \varepsilon)$, $\Omega_\varepsilon - y \subset \Omega$. Pour chaque $y \in B(0, \varepsilon)$, la fonction ψ_y définie par $\psi_y(x) = \varphi(x + y)$ est dans $H_0^1(\Omega)$. Comme u est harmonique sur Ω, on en déduit que pour tout $y \in B(0, \varepsilon)$, $\int_\Omega \nabla_x u(x) \cdot \nabla\varphi(x + y) \, dx = 0$ d'où le résultat.

On peut donc appliquer la question précédente à u_ε. Comme u_ε converge vers u dans $L^2(B(R))$, on obtient que u_ε est de Cauchy dans $H^k(B(R/2))$ et en passant à la limite on obtient que $u \in H^k(B(R/2))$ (u étant la limite de u_ε dans $L^2(B(R))$, par unicité, c'est également la limite de u_ε dans $H^k(B(R/2))$). Ainsi, on a prouvé que pour tout $s \in \mathbb{N}$, il existe $R_s > 0$ tel que $u \in H^s(B(R_s))$, on peut ainsi conclure en utilisant l'injection de Sobolev $H^s \subset \mathcal{C}^{[s-n/2]}$.

Exercice 4 : inégalité de Caccioppoli généralisée

Soit $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ positive et valant 1 sur Ω'. La fonction $\eta^2 u$ est dans $H_0^1(\Omega)$ (c'est une fonction de H^1 nulle au voisinage de $\partial\Omega$).

Calculons $\left\langle Lu, \eta^2 u\right\rangle = \left\langle f, \eta^2 u\right\rangle$:

$$\begin{aligned}\left\langle Lu, \eta^2 u\right\rangle &= \sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega a_{ij} (\partial_{x_j} u) \partial_{x_i} \left[\eta^2 u\right] + \sum_{i=1}^{d} \int_\Omega b_i (\partial_{x_i} u) \eta^2 u + \int_\Omega c u^2 \eta^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega \eta^2 a_{ij} (\partial_{x_j} u)(\partial_{x_i} u) + 2 \sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega a_{ij} u (\partial_{x_j} u) \eta (\partial_{x_i} \eta) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{d} \int_\Omega b_i (\partial_{x_i} u) \eta^2 u + \int_\Omega c u^2 \eta^2.\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\alpha \int_\Omega \eta^2 |\nabla u|^2 &\leq \sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega \eta^2 a_{ij} (\partial_{x_j} u)(\partial_{x_i} u) \\ &\leq \int_\Omega (|f| \eta^2 |u| + |c| u^2 \eta^2) + 2C' \int_\Omega |u| |\nabla u| \eta |\nabla \eta| + C'' \int_\Omega |u| |\nabla u| \eta^2 \\ &\leq \int_\Omega (|f| \eta^2 |u| + |c| u^2 \eta^2) \\ &\quad + \left(\int_\Omega \eta^2 |\nabla u|^2\right)^{1/2} \left[2C' \left(\int_\Omega u^2 |\nabla \eta|^2\right)^{1/2} + C'' \left(\int_\Omega u^2 \eta^2\right)^{1/2}\right]\end{aligned}$$

Une inégalité de la forme $x^2 \leq ax + b$ avec $b \geq 0$ implique $x^2 \leq a^2 + 2b$. On a donc :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \eta^2 |\nabla u|^2 &\leq \frac{1}{\alpha^2} \left[2C' \left(\int_\Omega u^2 |\nabla \eta|^2\right)^{1/2} + C'' \left(\int_\Omega u^2 \eta^2\right)^{1/2}\right]^2 + \frac{2}{\alpha} \int_\Omega \eta^2 (|fu| + |c| u^2) \\ &\leq \frac{8C'^2}{\alpha^2} \int_\Omega u^2 |\nabla \eta|^2 + \frac{2C''^2}{\alpha^2} \int_\Omega u^2 \eta^2 + \frac{2}{\alpha} \int_\Omega \eta^2 (|fu| + |c| u^2) \\ &\leq \frac{8C'^2}{\alpha^2} \|\nabla \eta\|_\infty^2 \int_\Omega u^2 + \frac{2C''^2}{\alpha^2} \|\eta\|_\infty^2 \int_\Omega u^2 + \frac{2}{\alpha} \|\eta\|_\infty^2 \int_\Omega \left(\frac{1}{2} f^2 + \left(\frac{1}{2} + \|c\|_\infty\right) u^2\right) \\ &\leq C \int_\Omega \left(u^2 + f^2\right)\end{aligned}$$

pour une constante C bien choisie.
Comme $\eta = 1$ sur Ω', cela donne :

$$\int_{\Omega'} |\nabla u|^2 \leq \int_\Omega \eta^2 |\nabla u|^2 \leq C \int_\Omega \left(u^2 + f^2\right).$$

Exercice 5 : estimation des dérivées d'une fonction harmonique

1. Pour tout x dans un voisinage de x_0 :

$$u(x) = \frac{1}{|B(x_0, r)|} \int_{B(x,r)} u(y)\, dy = \frac{1}{|B(x_0, r)|} \int_{B(0,r)} u(x+z)\, dz.$$

On peut dériver sous l'intégrale. On applique ensuite la formule de Green à la fonction $U : \Omega \to \mathbb{R}^n$ telle que $U_i = 0$ si $i \neq j$ et $U_j = u$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) &= \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(0,r)} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x+z)dz \\
&= \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x,r)} \frac{\partial u}{\partial x_j}(y)dy \\
&= \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x,r)} \operatorname{div} U(y)dy \\
&= \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{\partial B(x,r)} \langle U(y), \nu(y)\rangle \, dy \\
&= \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{\partial B(x,r)} u(y)\nu_j(y)dy.
\end{aligned}$$

2. Appliquons l'égalité précédente à $u - m$ (qui est également $\mathcal{C}^2$ et harmonique sur Ω) et utilisons la majoration $0 \leq u - m \leq M - m$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0)\right| &\leq \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{\partial B(x_0,r)} |(u(y)-m)\nu_j(y)|dy \\
&\leq \frac{M-m}{|B(x_0,r)|}\int_{\partial B(x_0,r)} |\nu_j(y)|dy \\
&\leq C_n\frac{M-m}{r^n} \times r^{n-1} \\
&= C_n\frac{M-m}{r}
\end{aligned}$$

où C_n est une constante dépendant uniquement de la dimension.

3. On applique l'inégalité de la question précédente pour $x_0 = x$, $r < d(x, \partial\Omega)$. On obtient ainsi que chaque composante de $\nabla u(x)$ est majorée par :

$$C_n\frac{M-m}{r}.$$

En faisant tendre r vers $d(x, \partial\Omega)$, chaque composante est majorée par :

$$C_n\frac{M-m}{d(x,\partial\Omega)}$$

ce qui entraîne l'inégalité demandée pour $C_n' = \sqrt{n}\, C_n$.

Exercice 6 : conséquences de la propriété de la moyenne pour les fonctions harmoniques

1. La fonction f est harmonique donc vérifie la propriété de la moyenne :

$$f(x_0)|\partial B(0,1)| = \int_{\partial B(0,1)} f(x_0 + r\omega)\, dS(\omega), \quad \forall\, r \in [0, \rho(x_0)[.$$

On multiplie chaque membre de l'égalité par $\psi(r)r^{n-1}$ et on intègre en $r \in [0, R]$:

$$\begin{aligned} f(x_0)|\partial B(0,1)| \int_0^R \psi(r)r^{n-1}\,dr &= \int_0^R \left(\int_{\partial B(0,1)} f(x_0 + r\omega)\,d\sigma(\omega) \right) \psi(r)r^{n-1}\,dr \\ &= \int_{\partial B(0,1)} \int_0^R f(x_0 + r\omega)\psi(r)r^{n-1}\,dr\,dS(\omega). \end{aligned}$$

Enfin, on effectue le changement de variable des coordonnées cartésiennes vers les sphériques pour obtenir :

$$f(x_0) \int_{B(0,R)} \psi(|y|)\,dy = \int_{B(0,R)} f(x_0 + y)\psi(|y|)\,dy.$$

2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. D'après la propriété de la moyenne,

$$f(x_0) = \frac{1}{|\partial B(0,1)|} \int_{\partial B(0,1)} f(x_0 + r\omega)\,dS(\omega), \quad \forall\, r > 0.$$

D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R > 0$ tel que si $|x| \geq R$, alors $|f(x)| \leq \varepsilon$. Donc pour tout $r \geq R + |x_0|$ et tout $\omega \in \partial B(0,1)$, on a $|f(x_0 + r\omega)| \leq \varepsilon$. On en déduit que $f(x_0 + r\omega) \to 0$ uniformément en $\omega \in \partial B(0,1)$ lorsque $r \to +\infty$. Donc, lorsque $r \to +\infty$,

$$|f(x_0)| \leq \frac{1}{|\partial B(0,1)|} \int_{\partial B(0,1)} |f(x_0 + r\omega)|\,dS(\omega) \leq \sup_{|\omega|=1} |f(x_0 + r\omega)| \to 0.$$

Exercice 7 : régularité d'une distribution harmonique

1. a) On a $(\phi T) \in \mathcal{E}'(\Omega)$ et

$$\Delta(\phi T) = \operatorname{div}(\nabla(\phi T)) = \operatorname{div}((\nabla\phi)T + \phi(\nabla T)) = (\Delta\phi)T + 2\nabla\phi \cdot \nabla T$$

où on a utilisé que $\Delta T = 0$. De plus, on a que $\nabla\phi$ est à support dans $\{x \in \mathbb{R}^n,\ R \leq |x| \leq 3r/2\}$. On peut en conclure que ϕT est harmonique sur $B(x_0, r)$.
b) On a

$$\Delta(\theta_\varepsilon * (\phi T)) = \theta_\varepsilon * \Delta(\phi T).$$

On a montré que ϕT est harmonique sur $B(x_0, r)$ donc en utilisant le fait que

$$\begin{aligned} \operatorname{supp}(\theta_\varepsilon * \Delta(\phi T)) &\subset \operatorname{supp}(\theta_\varepsilon) + \operatorname{supp}(\Delta(\phi T)) \\ &\subset B(0,\varepsilon) + \mathbb{R}^n \setminus B(x_0, r) = \mathbb{R}^n \setminus B(x_0, r - \varepsilon). \end{aligned}$$

Donc $\theta_\varepsilon * (\phi T) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ est harmonique dans $B(x_0, r - \varepsilon)$.
c) Etant le choix de ε, $\theta_\varepsilon * (\phi T)$ est harmonique sur $B(x_0, 3r/4)$. Donc pour tout $x \in B(x_0, r/2)$, d'après la question 1. de l'exercice 6 et le fait que $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(|z|^2)\,dz = 1$,

$$\begin{aligned} \theta_\varepsilon * (\phi T)(x) &= \int_{B(0,r/4)} \theta_\varepsilon * (\phi T)(x + y)\psi(|y|^2)\,dy \\ &= \int_{B(0,r/4)} \theta_\varepsilon * (\phi T)(x - y)\psi(|y|^2)\,dy = \Psi * (\theta_\varepsilon * (\phi T))(x). \end{aligned}$$

d) On a $\theta_\varepsilon * (\phi T) \to \phi T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Donc

$$\Psi * (\theta_\varepsilon * (\phi T)) \to \Psi * (\phi T)$$

uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^n$ lorsque $\varepsilon \to 0$.
e) Comme d'après la question c), pour tout $x \in B(x_0, r/2)$, $\theta_\varepsilon * (\phi T)(x) = \Psi * (\theta_\varepsilon * (\phi T))(x)$, on a au sens des distributions

$$\theta_\varepsilon * (\phi T)_{|B(x_0,r/2)} = \Psi * (\theta_\varepsilon * (\phi T))_{|B(x_0,r/2)}$$

et donc en faisant tendre ε vers 0 des deux côtés, on obtient

$$(\phi T)_{|B(x_0,r/2)} = (\Psi * (\phi T))_{|B(x_0,r/2)}$$

Or le membre de droite est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ donc $T_{|B(x_0,r/2)} = (\phi T)_{|B(x_0,r/2)}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $B(x_0, r/2)$. Comme $x_0 \in \Omega$ était arbitraire, on en conclut que T est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω.
2. On note $\widehat{T}$ la transformée de Fourier de T. On a alors :

$$\widehat{\Delta T} = -|\xi|^2 \hat{T} = 0 \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

On en déduit que $\widehat{T}$ est une distribution à support dans $\{0\}$ et est donc une combinaison linéaire de Dirac en 0 et de ses dérivées. Il existe donc $m \in \mathbb{N}$ et des nombres $a_\alpha \in \mathbb{C}$ pour $|\alpha| \leq m$ tels que

$$\widehat{T} = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0.$$

Le théorème d'inversion de Fourier nous donne alors

$$T = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (-i\xi)^\alpha$$

d'où le résultat.