Corrigé n°2

Exercice 1 : principe du maximum faible pour l'équation de la chaleur

1. a) Comme K_T est compact, u_ε atteint son maximum en un point $(t_\varepsilon, x_\varepsilon) \in K_T$. On suppose que $(t_\varepsilon, x_\varepsilon) \notin \Gamma_T$. Alors $x_\varepsilon \in \Omega$ et $0 < t_\varepsilon \leq T$. Par ailleurs, par définition de $(t_\varepsilon, x_\varepsilon)$, on a pour tout $x \in \overline{\Omega}$, $u_\varepsilon(t_\varepsilon, x) \leq u_\varepsilon(t_\varepsilon, x_\varepsilon)$. Donc la fonction $x \in \overline{\Omega} \mapsto u(t_\varepsilon, x) \in \mathbb{R}$ atteint son maximum en $x_\varepsilon \in \Omega$. On a donc $\Delta u_\varepsilon(t_\varepsilon, x_\varepsilon) \leq 0$.
b) On a :

$$\partial_t u_\varepsilon(t_\varepsilon, x_\varepsilon) = \lim_{h \to 0^+} \frac{u_\varepsilon(t_\varepsilon - h, x_\varepsilon) - u_\varepsilon(t_\varepsilon, x_\varepsilon)}{-h}.$$

Pour $h > 0$ assez petit, on a $0 < t_\varepsilon - h < T$ et donc $(t_\varepsilon - h, x_\varepsilon) \in K_T$. On en déduit $u_\varepsilon(t_\varepsilon - h, x_\varepsilon) \leq u_\varepsilon(t_\varepsilon, x_\varepsilon)$ et donc $\partial_t u_\varepsilon(t_\varepsilon, x_\varepsilon) \geq 0$.
c) En combinant les deux résultats précédents, on arrive à

$$(\partial_t u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon)(t_\varepsilon, x_\varepsilon) \geq 0.$$

Or $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^0(\overline{Q}) \cap \mathcal{C}^2(Q)$ et pour tout $(t, x) \in Q$,

$$(\partial_t u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon)(t, x) = (\partial_t u - \Delta u)(t, x) - 2n\varepsilon \leq -2n\varepsilon,$$

ce qui nous donne une contradiction. On conclut que $(t_\varepsilon, x_\varepsilon) \in \Gamma_T$.
2. En utilisant la question précédente, on a :

$$\sup_{K_T} u \leq \sup_{K_T} u_\varepsilon = \sup_{\Gamma_T} u_\varepsilon.$$

Puis en remarquant que $\overline{\Omega}$ est compact, on a l'existence d'une constante $C > 0$ telle que $|x|^2 \leq C$ pour tout $x \in \overline{\Omega}$. Par conséquent,

$$\sup_{K_T} u \leq \sup_{\Gamma_T} (u + \varepsilon |x|^2) \leq \sup_{\Gamma_T} u + C\varepsilon.$$

En faisant tendre ε vers 0 et en utilisant le fait que $\Gamma_T \subset K_T$, on a :

$$\sup_{K_T} u \leq \sup_{\Gamma_T} u \leq \sup_{K_T} u$$

d'où le résultat voulu.

Exercice 2 : principe du maximum fort pour l'équation de la chaleur

1. a) Dans la suite, on note $E(r) = E(0, 0; r)$ pour tout $r > 0$. On commence par remarquer que si $r > 0$ est assez petit alors $E(t, x; r) \subset \Omega_T$. En effet, on peut réécrire l'ensemble $E(t, x; r)$ de la manière suivante :

$$E(t, x; r) = \left\{ (s, y) \in \mathbb{R}^{n+1},\ t - \frac{r^2}{4\pi} \leq s < t \text{ et } |x - y|^2 \leq 4n(\log r)(t - s) - 2n(t - s)\log(4\pi(t - s)) \right\}.$$

On voit immédiatement que si r est assez petit, $t - \frac{r^2}{4\pi} > 0$. Puis si r est assez petit $\log r \leq 0$ et donc si $(s,y) \in E(t,x;r)$, $|x-y|^2 \leq -2nr^2 \log(r^2) \xrightarrow[r\to 0]{} 0$. On en déduit que pour r assez petit, $y \in \Omega$. Puis par changement de variable, on a :

$$\phi(r) = \frac{1}{r^n} \iint_{E(r)} u(s+t, y+x) \frac{|y|^2}{s^2}\, dy\, ds = \iint_{E(1)} u(r^2 s + t, ry + x)\, \frac{|y|^2}{s^2}\, dy\, ds.$$

On dérive ensuite cette expression et on obtient :

$$\begin{aligned}
\phi'(r) &= \iint_{E(1)} \left(2r\partial_s u(r^2 s + t, ry + x) \frac{|y|^2}{s} + \sum_{i=1}^n \partial_{y_i} u(r^2 s + t, ry + x) y_i \frac{|y|^2}{s^2} \right) dy\, ds \\
&= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left(2\partial_s u(s+t, y+x) \frac{|y|^2}{s} + \sum_{i=1}^n \partial_{y_i} u(s+t, y+x) y_i \frac{|y|^2}{s^2} \right) dy\, ds \\
&=: J_1 + J_2,
\end{aligned}$$

où on a de nouveau procédé à un changement de variable pour obtenir la deuxième égalité. Comme indiqué dans l'énoncé, on introduit la fonction ψ définie par

$$\psi(s,y) = -n/2 \ln(-4\pi s) + |y|^2/4s + n \ln(r).$$

On observe alors que si $(s,y) \in \partial E(r)$, $\Phi(-s,-y) = 1/r^n$ et donc $\psi(s,y) = 0$ sur $\partial E(r)$. En utilisant cette remarque et en faisant une intégration par parties par rapport à y, on a :

$$\begin{aligned}
J_1 &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} 2\partial_s u(s+t, y+x) \frac{|y|^2}{s}\, dy\, ds \\
&= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} 4\partial_s u(s+t, y+x) \sum_{i=1}^n y_i \partial_{y_i} \psi(s,y)\, dy\, ds \\
&= -\frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left(4n\partial_s u(s+t, y+x)\, \psi(s,y) + 4 \sum_{i=1}^n \partial_{sy_i} u(s+t, y+x) y_i \psi(s,y) \right) dy\, ds.
\end{aligned}$$

En intégrant par parties par rapport à s, on obtient :

$$\begin{aligned}
J_1 &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left(-4n\partial_s u(s+t, y+x)\, \psi(s,y) + 4 \sum_{i=1}^n \partial_{y_i} u(s+t, y+x) y_i \partial_s \psi(s,y) \right) dy\, ds \\
&= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left(-4n\partial_s u(s+t, y+x)\, \psi(s,y) + 4 \sum_{i=1}^n \partial_{y_i} u(s+t, y+x) y_i \left(-\frac{n}{2s} - \frac{|y|^2}{4s^2} \right) \right) dy\, ds \\
&= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left(-4n\partial_s u(s+t, y+x)\, \psi(s,y) - \frac{2n}{s} \sum_{i=1}^n \partial_{y_i} u(s+t, y+x) y_i \right) dy\, ds - J_2.
\end{aligned}$$

On utilise maintenant que u est solution de l'équation de la chaleur pour obtenir que

$$\begin{aligned}
\phi'(r) &= J_1 + J_2 \\
&= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left(-4n(\Delta u)(s+t, y+x)\psi(s,y) - \frac{2n}{s} \sum_{i=1}^{n} \partial_{y_i} u(s+t, y+x) y_i \right) dy\, ds \\
&= \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{i=1}^{n} \iint_{E(r)} \left(4n \partial_{y_i} u(s+t, y+x) \partial_{y_i} \psi(s,y) - \frac{2n}{s} \partial_{y_i} u(s+t, y+x) y_i \, dy\, ds \right) dy\, ds \\
&= 0
\end{aligned}$$

par définition de ψ. On en déduit que ϕ est constante.
b) En utilisant la question précédente, on a pour tout $r > 0$ tel que $E(t, x; r) \subset \Omega_T$,

$$\phi(r) = \lim_{\rho \to 0} \phi(\rho) = \lim_{\rho \to 0} \iint_{E(1)} u(\rho^2 s + t, \rho y + x) \frac{|y|^2}{s^2} \, dy\, ds = u(t, x) \iint_{E(1)} \frac{|y|^2}{s^2} \, dy\, ds = 4\, u(t, x).$$

On va maintenant prouver l'égalité admise dans l'énoncé :

$$\iint_{E(1)} \frac{|y|^2}{s^2} \, dy\, ds = 4.$$

On note $J = \iint_{E(1)} \frac{|y|^2}{s^2} \, dy\, ds$. En utilisant qu'on peut écrire $E(1)$ comme suit :

$$E(1) = \left\{ (s, y) \in \mathbb{R}^{n+1},\ -\frac{1}{4\pi} \leq s < 0 \text{ et } |y|^2 \leq 2ns \log(-4\pi s) \right\},$$

on a :

$$\begin{aligned}
J &= |\partial B(0,1)| \int_{-1/(4\pi)}^{0} \frac{1}{s^2} \int_0^{\sqrt{2ns \log(-4\pi s)}} r^2 r^{n-1} \, dr\, ds \\
&= |\partial B(0,1)| \int_0^{1/(4\pi)} \frac{1}{s^2} \int_0^{\sqrt{-2ns \log(4\pi s)}} r^{n+1} \, dr\, ds \\
&= \frac{|\partial B(0,1)|\, (2n)^{\frac{n+2}{2}}}{n+2} \int_0^{1/(4\pi)} s^{\frac{n-2}{2}} \left(-\log(4\pi s)\right)^{\frac{n+2}{2}} \, ds.
\end{aligned}$$

Ensuite, par changements de variables, on obtient :

$$\begin{aligned}
J &= \frac{|\partial B(0,1)|\, (2n)^{\frac{n+2}{2}}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}} (n+2)} \int_0^{+\infty} e^{-t\frac{n}{2}} t^{\frac{n+2}{2}} \, dt \\
&= \frac{|\partial B(0,1)|\, (2n)^{\frac{n+2}{2}}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}} (n+2)} \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{n+4}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{\frac{n+4}{2}-1} \, ds.
\end{aligned}$$

Puis, en identifiant le dernier terme intégral à $\Gamma\left(n/2+2\right)$ et en utilisant le fait que $|\partial B(0,1)| = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$, on a :

$$\begin{aligned}
J &= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}\, (2n)^{\frac{n+2}{2}}\, 2^{\frac{n+4}{2}}\, \Gamma\left(\frac{n}{2}+2\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\, (4\pi)^{\frac{n}{2}}\, (n+2)\, n^{\frac{n+4}{2}}} \\
&= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}\, (2n)^{\frac{n+2}{2}}\, 2^{\frac{n+4}{2}}\, n\,(n+2)}{4\,(4\pi)^{\frac{n}{2}}\, (n+2)\, n^{\frac{n+4}{2}}}
\end{aligned}$$

où la dernière égalité vient du fait que

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}+2\right) = \frac{n+2}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{n(n+2)}{4}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

On conclut alors que $J = 4$.

2. On choisit r assez petit pour que $E(t_0, x_0; r) \subset \Omega_T$. En utilisant la propriété de la moyenne prouvée précédemment, on a :

$$u(t_0, x_0) = \frac{1}{4r^n} \iint_{E(t_0,x_0;r)} u(s, y) \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2}\, dy\, ds$$

puis en utilisant que $\frac{1}{4r^n} \iint_{E(t_0,x_0;r)} \frac{|x_0-y|^2}{(t_0-s)^2}\, dy\, ds = 1$, on en déduit que

$$\frac{1}{4r^n} \iint_{E(t_0,x_0;r)} (u(t_0, x_0) - u(s, y)) \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2}\, dy\, ds = 0$$

avec, par définition de (t_0, x_0), $u(t_0, x_0)-u(s, y) \geq 0$ pour tout (s, y). Donc u est constante sur $E(t_0; x_0; r)$. Soit maintenant $(s_0, y_0) \in \Omega_T$ avec $s_0 < t_0$ alors, par convexité de Ω, le segment L qui joint (t_0, x_0) à (s_0, y_0) est inclus dans Ω_T. On définit

$$\sigma_0 = \min\{s \geq s_0,\ u(t, x) = u(t_0, x_0) \text{ pour tout } (t, x) \in L,\ s \leq t \leq t_0\}$$

qui est bien défini par continuité de u. Si $\sigma_0 > s_0$, alors $u(\sigma_0, z_0) = u(t_0, x_0)$ pour $(\sigma_0, z_0) \in L \cap \Omega_T$ et donc $u = u(t_0, x_0)$ sur $E(\sigma_0, z_0; r)$ si r est assez petit. Comme $E(\sigma_0, z_0; r)$ contient $L \cap \{(t, x) \in L : \sigma_0 - \sigma \leq t \leq \sigma_0\}$ pour $\sigma > 0$ petit, on a une contradiction. Donc $\sigma_0 = s_0$ et $u = u(t_0, x_0)$ sur L. On a ainsi montré que pour $s < t_0$, u est constante sur Ω_s. Par continuité, on en conclut que u est constante sur Ω_{t_0}.

Exercice 3 : inégalité de Poincaré-Wirtinger et équation de la chaleur en dimension 1

1. Considérons le produit scalaire usuel sur $L^2(]0, T[)$: $(f, g) = \int_0^T f(t)\overline{g(t)}\, dt$. On pose ensuite $e_k(t) = T^{-1/2} \exp(2ik\pi t/T)$. Ces fonctions sont T-périodiques et on a $(e_k, e_\ell) = \delta_{k,\ell}$. Introduisons les coefficients de Fourier

$$\hat{u}_k = (u, e_k) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T u(t) \exp\Big(-\frac{2i\pi kt}{T}\Big)\, dt.$$

En intégrant par parties, on vérifie que les coefficients de Fourier de u' vérifient

$$\widehat{(u')}_k = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T u'(t) \exp\Big(-\frac{2i\pi kt}{T}\Big)\, dt = \frac{2i\pi}{T} k\hat{u}_k.$$

On en déduit grâce à la formule de Plancherel appliquée à u et à u' que

$$\int_0^T |u(t)|^2\, dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{u}_k|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} |\hat{u}_k|^2 \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} |k|^2|\hat{u}_k|^2 = \Big(\frac{T}{2\pi}\Big)^2 \int_0^T |u'(t)|^2\, dt,$$

où l'on a utilisé que $\hat{u}_0 = T^{-1/2} \int_0^T u(t)\, dt = 0$.

2. Notons d'abord que, par périodicité en x,

$$\frac{d}{dt}\int_{-\pi}^{\pi} u(t,x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \partial_x(\gamma(x)\partial_x u)\,dx = 0.$$

On en déduit que $\int_{-\pi}^{\pi} u(t,x)\,dx = 0$ pour tout temps $t \geq 0$ puisque cette propriété est vraie initialement par hypothèse. Ceci va nous permettre d'utiliser l'inégalité de Poincaré-Wirtinger. Ensuite on multiplie l'équation par u et on intègre sur $[-\pi,\pi]$ pour obtenir

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\pi}^{\pi} u(t,x)^2\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} \gamma(x)(\partial_x u(t,x))^2\,dx = 0.$$

Comme γ est minorée par une constante strictement positive, l'inégalité de Poincaré-Wirtinger assure que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\pi}^{\pi} u(t,x)^2\,dx \leq -C_1\int_{-\pi}^{\pi} (\partial_x u(t,x))^2\,dx,$$

pour une certaine constante $C_1 > 0$. Puis en utilisant l'inégalité de Poincaré-Wirtinger, on obtient l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\pi}^{\pi} u(t,x)^2\,dx \leq -\frac{C}{2}\int_{-\pi}^{\pi} u(t,x)^2\,dx.$$

L'inégalité voulue provient du lemme de Grönwall.

Exercice 4 : régularité pour l'équation de Kolmogorov

Dans tout l'exercice, on note $\|\cdot\|$ la norme $\|\cdot\|_{L^2}$ et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2}$.

1. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur le troisième terme de la fonctionnelle :

$$\begin{aligned} Ct^2\langle\partial_x h,\partial_v h\rangle &\geq -Ct^2\|\partial_v h\|\|\partial_x h\| = -(C\sqrt{t}\|\partial_v h\|)\,(t^{3/2}\|\partial_x h\|) \\ &\geq -\frac{C^2}{2}t\|\partial_v h\|^2 - \frac{1}{2}t^3\|\partial_x h\|^2 \\ &\geq -\frac{B}{2}t\|\partial_v h\|^2 - \frac{1}{2}t^3\|\partial_x h\|^2 \end{aligned}$$

en supposant $C^2 \leq B$. D'où l'inégalité voulue :

$$\mathcal{F}(t,h) \geq A\|h\|^2 + \frac{B}{2}t\|\partial_v h\|^2 + \frac{1}{2}t^3\|\partial_x h\|^2.$$

2. Il faut calculer la dérivée par rapport au temps de chaque terme de la fonctionnelle. On remarque avant de démarrer les calculs qu'en intégrant par parties aussi bien en x (les fonctions considérées sont périodiques en x) qu'en v (on intègre des fonctions Schwartz), il n'y aura pas de termes de bords qui apparaissent. Dans les calculs qui suivent, on sous-entend la dépendance en t de f_t que l'on note simplement f.

On a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{F}(t,f) &= A\frac{d}{dt}\|f\|^2 + B\|\partial_v f\|^2 + Bt\frac{d}{dt}\|\partial_v f\|^2 + 2Ct\langle\partial_x f,\partial_v f\rangle \\ &\quad + Ct^2\frac{d}{dt}\langle\partial_x f,\partial_v f\rangle + 3t^2\|\partial_x f\|^2 + t^3\frac{d}{dt}\|\partial_x f\|^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Pour le premier terme, en utilisant $\partial_t f = -v\partial_x f + \partial_{vv} f$, on a :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|f\|^2 = \langle -v\partial_x f + \partial_{vv} f, f\rangle = \int_{[0,1]\times\mathbb{R}} (-v\partial_x(f^2/2) - (\partial_v f)^2)\, dv\, dx$$

où l'on a réalisé une intégration par parties pour le deuxième terme. Le premier terme est nul car on intègre sur la sphère en x. On obtient donc :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|f\|^2 = -\|\partial_v f\|^2. \tag{2}$$

On calcule ensuite la dérivée par rapport à t du terme $\|\partial_v f\|^2$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_v f\|^2 = \langle \partial_v(Lf), \partial_v f\rangle = \langle L(\partial_v f), \partial_v f\rangle + \langle [\partial_v, L]f, \partial_v f\rangle = -\|\partial_{vv} f\|^2 + \langle [\partial_v, L]f, \partial_v f\rangle$$

où l'on a utilisé le calcul effectué précédemment sur f à $\partial_v f$. Concernant le commutateur, on a :

$$[\partial_v, L] = -[\partial_v, v\partial_x] + [\partial_v, \partial_{vv}] = -\partial_x.$$

On a donc :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_v f\|^2 = -\|\partial_{vv} f\|^2 - \langle \partial_x f, \partial_v f\rangle. \tag{3}$$

Concernant le terme mixant les dérivées en x et en v, on calcule en utilisant le fait que $[\partial_x, L] = 0$ et $[\partial_v, L] = -\partial_x$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle \partial_x f, \partial_v f\rangle &= \langle L(\partial_x f), \partial_v f\rangle + \langle \partial_x f, L(\partial_v f)\rangle - \|\partial_x f\|^2 \\
&= -\langle v\partial_{xx} f, \partial_v f\rangle + \langle \partial_{vvx} f, \partial_v f\rangle - \langle \partial_x f, v\partial_{xv} f\rangle + \langle \partial_x f, \partial_{vvv} f\rangle - \|\partial_x f\|^2 \\
&= \langle \partial_{xvv} f, \partial_v f\rangle + \langle \partial_x f, \partial_{vvv} f\rangle - \|\partial_x f\|^2
\end{aligned}$$

où on a fait une intégration par parties en x sur le premier terme pour voir qu'il s'annule avec le troisième. Puis en faisant une intégration par parties en v sur chaque terme :

$$\frac{d}{dt}\langle \partial_x f, \partial_v f\rangle = -2\langle \partial_{xv} f, \partial_{vv} f\rangle - \|\partial_x f\|^2. \tag{4}$$

Finalement, la dérivée par rapport à t de $\|\partial_x f\|^2$ est simple à calculer car $[\partial_x, L] = 0$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_x f\|^2 = -\|\partial_{vx} f\|^2. \tag{5}$$

En revenant à (1) et en utilisant (2), (3), (4) et (5), on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{F}(t,f) = -(2A - B)\|\partial_v f\|^2 - 2Bt\|\partial_{vv} f\|^2 - 2(B-C)t\langle \partial_x f, \partial_v f\rangle \\
- 2Ct^2\langle \partial_{xv} f, \partial_{vv} f\rangle - (C-3)t^2\|\partial_x f\|^2 - 2t^3\|\partial_{vx} f\|^2
\end{aligned}$$

Pour les termes sans signe, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{cases} 2|B-C|t\langle \partial_x f, \partial_v f\rangle| \le 2(B+C)t\|\partial_x f\|\|\partial_v f\| \le (B+C)^2\|\partial_v f\|^2 + t^2\|\partial_x f\|^2 \\ 2Ct^2|\langle \partial_{xv} f, \partial_{vv} f\rangle| \le 2Ct^2\|\partial_{xv} f\|\|\partial_{vv} f\| \le t^3\|\partial_{xv} f\|^2 + C^2 t\|\partial_{vv} f\|^2. \end{cases}$$

On obtient ainsi :

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(t,f) \leq -(2A - B - (B+C)^2)\|\partial_v f\|^2 - (2B - C^2)t\|\partial_{vv} f\|^2 \\ - (C-4)t^2\|\partial_x f\|^2 - t^3\|\partial_{vx} f\|^2.$$

En prenant $C \geq 4$, puis $B \geq C^2/2$ (compatible avec la condition de la question 1.) et enfin A tel que $2A - B - (B+C)^2 \geq 0$, on a le résultat voulu :

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \frac{d}{dt}\mathcal{F}(t,f) \leq 0.$$

3. D'après les questions 1. et 2., on a :

$$\forall\, t \in [0,1], \quad A\|f_t\|^2 + \frac{B}{2}t\|\partial_v f_t\|^2 + \frac{1}{2}t^3\|\partial_x f_t\|^2 \leq \mathcal{F}(t,f_t) \leq \mathcal{F}(0,f_0) = A\|f_0\|^2.$$

En particulier, on a :

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \frac{B}{2}t\|\partial_v f_t\|^2 \leq A\|f_0\|^2$$

et pour une certaine constante $D > 0$, comme $t \in [0,1]$,

$$Dt^3\|f_t\|^2_{H^1} \leq A\|f_0\|^2,$$

ce qui nous donne les estimations voulues.

Exercice 5 : inégalité de Poincaré et équation de Fokker-Planck

1. Par densité, il suffit de prouver l'inégalité pour $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$. On écrit la formule de Taylor avec reste intégral pour f entre x et $y \in \Omega$:

$$f(x) - f(y) = \int_0^1 \nabla f(z_t) \cdot (x-y)\, dt \quad \text{où} \quad z_t = (1-t)\,x + t\,y.$$

On multiplie cette identité par $\nu(y)$ et on intègre par rapport à $y \in \Omega$ l'égalité obtenue, ce qui donne :

$$f(x) - \langle f\rangle_\nu = \int_\Omega \int_0^1 \nabla f(z_t) \cdot (x-y)\, dt\, \nu(y)\, dy.$$

En utilisant ensuite l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\begin{aligned}\int_\Omega (f(x) - \langle f\rangle_\nu)^2\, \nu(x)\, dx &\leq \int_\Omega \int_\Omega \int_0^1 |\nabla f(z_t)|^2\, |x-y|^2\, dt\, \nu(y)\, \nu(x) dy dx \\ &\leq C_1 \int_\Omega \int_\Omega \int_0^{1/2} |\nabla f(z_t)|^2\, dt dx\, \nu(y) dy + C_1 \int_\Omega \int_\Omega \int_{1/2}^1 |\nabla f(z_t)|^2\, dt dy\, \nu(x) dx \\ &= C_1 \int_\Omega \int_0^{1/2} \int_{\Omega(t,y)} |\nabla f(z)|^2\, \frac{dz}{1-t}\, dt\, \nu(y) dy + C_1 \int_\Omega \int_{1/2}^1 \int_{\Omega'(t,x)} |\nabla f(z)|^2\, \frac{dz}{t}\, dt\, \nu(x) dx \\ &\leq 2\, C_1 \int_\Omega |\nabla f(z)|^2\, dz,\end{aligned}$$

où on a noté
$$\begin{cases} C_1 = \|\nu\|_{L^\infty} \operatorname{diam}(\Omega)^2, \\ \Omega(t,y) = \{z \in \mathbb{R}^n,\ (z-ty)/(1-t) \in \Omega\}, \\ \Omega'(t,x) = \{z \in \mathbb{R}^n,\ (z-(1-t)x)/t \in \Omega\}. \end{cases}$$
On en déduit alors l'inégalité de Poincaré-Wirtinger avec la constante $\kappa = 1/(2\,C_1\,\|1/\nu\|_{L^\infty})$.
De plus, on a
$$\int_\Omega f^2\,\nu = \int_\Omega (f - \langle f\rangle_\nu + \langle f\rangle_\nu)^2\,\nu = \int_\Omega |f - \langle f\rangle_\nu|^2 \nu + \langle f\rangle_\nu^2$$
d'où la deuxième inégalité.
2. On cherche W sous la forme $W(x) = e^{\gamma\langle x\rangle}$. On calcule ensuite :
$$\nabla W(x) = \gamma\,\frac{x}{\langle x\rangle}\,e^{\gamma\langle x\rangle} \quad \text{et} \quad \Delta W(x) = \left(\gamma^2 + \gamma\,\frac{n-1}{\langle x\rangle} + \frac{\gamma}{\langle x\rangle^3} - \frac{\gamma^2}{\langle x\rangle^2}\right) e^{\gamma\langle x\rangle},$$
puis finalement
$$\begin{aligned} L^*W = \Delta W - x\cdot\nabla W \quad &= \quad \left(\gamma^2 + \gamma\,\frac{n-1}{\langle x\rangle} + \frac{\gamma}{\langle x\rangle^3} - \frac{\gamma^2}{\langle x\rangle^2} - \gamma\,\frac{|x|^2}{\langle x\rangle}\right) W \\ &\leq \quad -\theta W + b\,\mathbb{1}_{B(0,R)} \end{aligned}$$
avec le choix de $\theta = \gamma = 1$ puis R et b assez grands. En effet, pour $\theta = \gamma = 1$, on a
$$L^*W \leq \psi\,W, \quad \text{avec} \quad \psi(x) \xrightarrow[|x|\to\infty]{} -\infty.$$
Donc il existe $R > 0$ tel que si $|x| \geq R$, alors $\psi(x) \leq -1$. D'autre part, par continuité de ψ et W, on peut définir $b = \max_{|x|\leq R}((\psi+1)\,W)$. Ainsi, on a
$$\psi(x)\,W(x) \leq -W(x) = -W(x) + b\,\mathbb{1}_{B(0,R)}(x), \quad \text{si } |x| \geq R$$
et
$$\psi(x)\,W(x) = (\psi(x)+1)W(x) - W(x) \leq -W(x) + b = -W(x) + b\,\mathbb{1}_{B(0,R)}(x), \quad \text{si } |x| < R.$$
3. Il suffit de calculer $\partial_{x_j} G(x) = -x_j\,G(x)$ pour $j = 1, ..., n$ puis $\partial_{x_j x_j} G(x) = -G(x) + x_j^2\,G(x)$.
4. a) On réécrit l'inégalité de la question 2. de la manière suivante :
$$1 \leq -\frac{L^*W(x)}{\theta\,W(x)} + \frac{b}{\theta\,W(x)}\,\mathbb{1}_{B(0,R)}(x), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$
Il suffit de prouver l'inégalité pour $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ par densité. On considère donc $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et on a :
$$\int_{\mathbb{R}^n} g^2\,G \quad \leq \quad -\int_{\mathbb{R}^n} g^2\,\frac{L^*W}{\theta\,W}\,G + \frac{b}{\theta}\int_{B(0,R)} g^2\,\frac{1}{W}\,G = T_1 + T_2.$$

D'une part, comme $\nabla G + xG = 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\theta\, T_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \nabla W \cdot \left\{ \nabla \left(\frac{g^2}{W} \right) G + \frac{g^2}{W} \nabla G \right\} + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{g^2}{W}\, x \cdot \nabla W\, G \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \nabla W \cdot \nabla \left(\frac{g^2}{W} \right) G \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} 2\, \frac{g}{W}\ \nabla W \cdot \nabla g\, G - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{g^2}{W^2}\ |\nabla W|^2\, G \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla g|^2\, G - \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{g}{W} \nabla W - \nabla g \right|^2 G \\
&\le \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla g|^2\, G.
\end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité de Poincaré-Wirtinger avec $\Omega = B(0,R)$ prouvée à la question 1., on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\theta}{b}\, T_2 &= \int_{B(0,R)} g^2\, \frac{1}{W}\, G \\
&\le \left(\int_{B(0,R)} G \right) \int_{B(0,R)} g^2\, \nu_R \\
&\le \left(\int_{B(0,R)} G \right) \left(\langle g \rangle_{\nu_R}^2 + C \int_{B(0,R)} |\nabla g|^2\ \nu_R \right)
\end{aligned}$$

où C est une constante strictement positive.

En regroupant les deux estimations précédentes, on a montré que pour une certaine constante $C > 0$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} g^2\, G \le C \Big(\langle g \rangle_{\nu_R}^2 + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla g|^2\ G \Big). \tag{6}$$

b) On considère maintenant h telle que $\int_{\mathbb{R}^n} h^2 G < \infty$ et $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla h|^2 G < \infty$. On sait que pour tout $c \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} (h - \langle h \rangle_G)^2 G \le \phi(c) = \int_{\mathbb{R}^n} (h - c)^2\, G \tag{7}$$

car ϕ est une fonction polynomiale qui atteint son minimum en $\langle h \rangle_G$. On définit $g = h - \langle h \rangle_{\nu_R}$, de sorte que $\langle g \rangle_{\nu_R} = 0$, $\nabla g = \nabla h$. En utilisant tout d'abord (7) puis (6), on aboutit à

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (h - \langle h \rangle_G)^2\, G &\le \int_{\mathbb{R}^n} g^2\, G \\
&\le C \Big(\langle g \rangle_{\nu_R}^2 + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla g|^2\ G \Big) \\
&= C \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla h|^2\ G,
\end{aligned}$$

pour une constante $C > 0$, ce qui termine la preuve de l'inégalité de Poincaré.

5. On a

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} f(t,x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta_x f + \mathrm{div}_x(xf))\,dx = 0.$$

6. En utilisant la relation $G\,G^{-1} = 1$ et le fait que $\nabla_x(G^{-1}) = x\,G^{-1}$, on obtient une forme équivalente de l'équation de Fokker-Planck :

$$\begin{aligned}\partial_t f &= \mathrm{div}_x\big(\nabla_x f + G\,f\,\nabla_x G^{-1}\big)\\ &= \mathrm{div}_x\big(G\nabla_x(f\,G^{-1})\big).\end{aligned}$$

7. Quitte à remplacer $f(t,\cdot)$ par $f(t,\cdot) - \langle f_0\rangle$, on peut supposer que $\langle f(t,\cdot)\rangle = 0$ pour tout t d'après la question 5. On a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} f^2\,G^{-1} &= \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_t f)\,f\,G^{-1}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{div}_x\left(G\nabla_x\left(\frac{f}{G}\right)\right)\,\frac{f}{G}\,dx\\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} G\,\left|\nabla_x \frac{f}{G}\right|^2\,dx.\end{aligned}$$

On utilise ensuite l'inégalité de Poincaré démontrée à la question 4. que l'on applique à la fonction $g = f(t,.)/G$. On remarque de plus que $\langle g\rangle_G = 0$, ce qui nous donne

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} f^2\,G^{-1} \le -C_P\int_{\mathbb{R}^n} G\,\left(\frac{f}{G}\right)^2\,dx = -C_P\int_{\mathbb{R}^n} f^2\,G^{-1}\;dx,$$

puis on conclut grâce au lemme de Grönwall.