Corrigé n°3

Exercice 1 : propriétés de base de l'équation des ondes

1. D'après le cours, la solution u est donnée par

$$u(t,x) = \frac{1}{|\partial B(x,t)|} \int_{\partial B(x,t)} (tg(y) + f(y) + \nabla f(y) \cdot (y-x))\, dS(y), \quad \forall\, (t,x) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^3.$$

On va estimer chaque terme séparément. Tout d'abord, on a par changements de variable :

$$\frac{t}{|\partial B(x,t)|} \int_{\partial B(x,t)} g(y)\, dS(y) = \frac{t}{t^2 |\partial B(0,1)|} \int_{\partial B(0,t)} g(x+z)\, dS(z) = \frac{t}{4\pi} \int_{\partial B(0,1)} g(x+t\omega)\, dS(\omega).$$

D'autre part, comme par hypothèse, $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$, on peut écrire

$$g(x+t\omega) = -\int_t^{+\infty} \frac{d}{ds}(g(x+s\omega))\, ds = -\sum_{i=1}^3 \int_t^{+\infty} \omega_i\, \partial_{x_i} g(x+s\omega).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\frac{t}{|\partial B(x,t)|} \int_{\partial B(x,t)} g(y)\, dS(y) &= -\frac{t}{4\pi} \sum_{i=1}^3 \int_t^{+\infty} \int_{\partial B(0,1)} \omega_i\, \partial_{x_i} g(x+s\omega)\, dS(\omega) ds \\
&= -\frac{t}{4\pi} \sum_{i=1}^3 \int_t^{+\infty} \int_{\partial B(0,1)} \frac{1}{s^2}\, \omega_i\, \partial_{x_i} g(x+s\omega)\, s^2\, dS(\omega) ds \\
&\leq \frac{1}{4\pi t} \sum_{i=1}^3 \int_t^{+\infty} \int_{\partial B(0,1)} |\partial_{x_i} g(x+s\omega)|\, s^2\, dS(\omega) ds \\
&\leq \frac{1}{4\pi t} \sum_{i=1}^3 \int_{|y|\geq t} |\partial_{x_i} g(x+y)|\, dy \\
&\leq \frac{1}{4\pi t} \sum_{i=1}^3 \|\partial_{x_i} g\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}.
\end{aligned}$$

Concernant le deuxième terme, on le traite exactement de la même manière et on obtient :

$$\frac{1}{|\partial B(x,t)|} \int_{\partial B(x,t)} f(y)\, dS(y) \leq \frac{1}{4\pi t^2} \sum_{i=1}^3 \|\partial_{x_i} f\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}.$$

En supposant $t \geq 1$, on a $1/t^2 \leq 1/t$ et donc

$$\frac{1}{|\partial B(x,t)|} \int_{\partial B(x,t)} f(y)\, dS(y) \leq \frac{1}{4\pi t} \sum_{i=1}^3 \|\partial_{x_i} f\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}.$$

Enfin, concernant le dernier terme, on a :

$$\frac{1}{|\partial B(x,t)|}\int_{\partial B(x,t)} \nabla f(y)\cdot(y-x)\,dS(y) = \frac{1}{t^2|\partial B(0,1)|}\int_{\partial B(0,t)} \nabla f(x+z)\cdot z\,dS(z)$$
$$= \frac{t}{4\pi}\sum_{i=1}^{3}\int_{\partial B(0,1)} \omega_i\,\partial_{x_i} f(x+t\omega)\,dS(\omega).$$

On utilise maintenant que $\partial_{x_i} f$ est dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ pour écrire

$$\partial_{x_i} f(x+t\omega) = -\int_t^{+\infty} \frac{d}{ds}(\partial_{x_i} f(x+s\omega))\,ds = -\sum_{j=1}^{3}\int_t^{+\infty} \omega_j\,\partial_{x_i x_j} f(x+s\omega)\,ds.$$

Finalement, on a :

$$\frac{1}{|\partial B(x,t)|}\int_{\partial B(x,t)} \nabla f(y)\cdot(y-x)\,dS(y) = -\frac{t}{4\pi}\sum_{i,j}\int_t^{+\infty}\int_{\partial B(0,1)} \omega_i\,\omega_j\,\partial_{x_i x_j} f(x+s\omega)\,dS(\omega)\,ds.$$

On conclut comme précédemment que :

$$\frac{1}{|\partial B(x,t)|}\int_{\partial B(x,t)} \nabla f(y)\cdot(y-x)\,dS(y) \le \frac{1}{4\pi t}\sum_{i,j}\left\|\partial_{x_i x_j} f\right\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}.$$

2. On a

$$u(t,x) = \frac{t}{4\pi}\int_{\partial B(0,1)} g(x+t\omega)\,dS(\omega)$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int_{\partial B(0,1)} f(x+t\omega)\,dS(\omega) + \frac{t}{4\pi}\sum_{i=1}^{3}\int_{\partial B(0,1)} \omega_i\,\partial_{x_i} f(x+t\omega)\,dS(\omega).$$

Dans le premier terme, on remarque que pour $t>0$ fixé, si $|x|>R+t$, alors

$$|x+t\omega| \ge |x|-|t| = |x|-t > R$$

et donc $g(t+x\omega)=0$ ce qui entraine que le premier terme de $u(t,x)$ est nul. On procède de la même manière pour les deux autres termes.

3. Si $t>R$ et $|x|<t-R$, on a

$$|x+t\omega| \ge |t|-|x| = t-|x| > R$$

et donc $g(tx-t\omega)=0$. On conclut comme à la question précédente.

4. On commence par montrer que u est nulle dans tout le cône $C(t_0,x_0)$. On suppose ainsi que $\operatorname{supp} f \subset \{x : |x-x_0|\ge t_0\}$ et de même pour $\operatorname{supp} g$. On considère maintenant $t<t_0$. Si on regarde le premier terme dans l'expression de $u(t,x)$ et qu'on le voit comme une fonction de x, on s'aperçoit que son support est inclus dans $\{x : |x|=t\}+\{x : |x-x_0|\ge t_0\}$ et donc inclus dans $\{x : |x-x_0|\ge t_0-t\}$. Par conséquent, si (t,x) est tel que $|x-x_0|<t_0-t$, alors ce terme est nul. On peut montrer la même

chose pour les deux termes restants. On montre ainsi que u est nulle sur $C(t_0, x_0)$ et on en déduit, par continuité que u est nulle sur $\overline{C(t_0, x_0)}$ de sorte que $u(t_0, x_0) = 0$.

Exercice 2 : propagation des singularités pour l'équation des ondes

1. On utilise le fait que $\widehat{\Delta u}(t,\xi) = -|\xi|^2 \hat{u}(t,\xi)$:

$$\begin{cases} \partial_t^2 \hat{u}(t,\xi) + |\xi|^2 \hat{u}(t,\xi) & = 0 \\ (\hat{u}, \partial_t \hat{u})_{|t=0} & = (0, \hat{f}) \end{cases}$$

On a alors $\hat{u}(t,\xi) = a(\xi)e^{it|\xi|} + b(\xi)e^{-it|\xi|}$, pour deux fonctions a et b ne dépendant pas de t.
Les conditions initiales impliquent $a + b = 0$ et $i|\xi|(a-b) = \hat{f}$, donc $a = \frac{1}{2i|\xi|}\hat{f}$ et $b = -a$ pour $\xi \neq 0$, ce qui donne :

$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{f}(\xi)\frac{e^{it|\xi|} - e^{-it|\xi|}}{2i|\xi|} = \hat{f}(\xi)\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}.$$

Cette expression est également valable pour $\xi = 0$ si on prolonge la fonction $x \mapsto \sin(x)/x$ par 1 en 0.
Si f est $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact, alors $\hat{f}$ est à décroissance rapide donc, d'après l'expression qu'on vient de trouver, $\hat{u}(t,.)$ aussi, pour tout t, ce qui implique que $u(t,.)$ est $\mathcal{C}^\infty$.

2. On a :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(2\pi)^n}\frac{1}{2i}(u_+ - u_-) + \frac{1}{(2\pi)^n}\int (1-\chi(\xi))\frac{\sin(t\xi)}{|\xi|}e^{ix.\xi}\hat{f}(\xi)d\xi \\ =&\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\chi}{2i|\xi|}(e^{it|\xi|} - e^{-it|\xi|})\hat{f} + (1-\chi)\frac{e^{it|\xi|} - e^{-it|\xi|}}{2i|\xi|}\hat{f}\right) \\ =&\mathcal{F}^{-1}\left(\hat{f}(\xi)\frac{e^{it|\xi|} - e^{-it|\xi|}}{2i|\xi|}\right), \end{aligned}$$

ce qui est l'expression qu'on vient de trouver pour u.

3. Le membre de droite de la décomposition est la transformée de Fourier inverse d'une fonction continue à support compact (puisque $1 - \chi$ est à support compact). C'est donc une fonction $\mathcal{C}^\infty$.
Donc $WF(u(t)) \subset WF((u_+ - u_-)(t)) \subset WF(u_+(t)) \cup WF(u_-(t))$.

4. Il suffit de montrer que u_+^2 est $\mathcal{C}^\infty$.
La fonction $\hat{f}$ est à décroissance rapide sur le cône $\{\xi \text{ tq } 1 - \psi(\xi) \neq 0\}$. Comme $\frac{(1-\psi(\xi))\chi(\xi)}{|\xi|}e^{it|\xi|}$ est bornée sur $\mathbb{R}^n$, u_+^2 est la transformée de Fourier inverse d'une fonction à décroissance rapide. C'est donc une fonction $\mathcal{C}^\infty$.

5. La relation se vérifie en calculant les dérivées partielles.

Formellement, en notant $\delta(\xi) = \frac{\psi(\xi)\chi(\xi)}{|\xi|}$:

$$
\begin{aligned}
u_+^1(t,x) &= \int \delta(\xi) e^{i(x.\xi + t|\xi|)} \hat{f}(\xi) d\xi \\
&= \int \delta(\xi) e^{ix.\xi + t|\xi|} \left(\int f(y) e^{-iy.\xi} dy \right) d\xi \\
&= \int f(y)\delta(\xi) e^{i((x-y).\xi + t|\xi|)} d\xi dy \\
&= \sum_j \int_{y \in \mathrm{Supp} f, \xi \in \mathbb{R}^n} f(y)\delta(\xi) \left(\frac{x_j - y_j + t\frac{\xi_j}{|\xi|}}{i|x - y + t\frac{\xi}{|\xi|}|^2} \right) \partial_j e^{i((x-y).\xi + t|\xi|)} d\xi dy \\
&= -\sum_j \int_{y \in \mathrm{Supp} f, \xi \in \mathbb{R}^n} f(y)(\partial_j \delta_j)(\xi) e^{i((x-y).\xi + t|\xi|)} d\xi dy
\end{aligned}
$$

où on a noté $\delta_j(\xi) = \delta(\xi) \left(\frac{x_j - y_j + t\frac{\xi_j}{|\xi|}}{i|x-y+t\frac{\xi}{|\xi|}|^2} \right)$.

La fonction δ_j est bien définie pour $x \in U$ car, d'après les hypothèses de l'énoncé, $x - y + t\frac{\xi}{|\xi|}$ ne s'annule pas si $y \in \mathrm{Supp}(f)$ et $\chi(\xi) \neq 0$.
Pour x et y fixés, δ_j est une fonction homogène de degré -1 en ξ, en-dehors d'un voisinage de 0. Donc $\partial_j \delta_j$ est homogène de degré -2 en ξ en-dehors d'un voisinage de 0.
En réitérant le processus, on voit qu'on peut écrire, pour tout $K \geq 1$:

$$u_+^1(t,x) = \sum_{j \leq N_K} \int_{y \in \mathrm{Supp} f, \xi \in \mathbb{R}^n} f(y) \alpha_j^K(x,y,\xi) e^{i((x-y).\xi + t|\xi|)} d\xi dy$$

où les α_j^K sont des fonctions homogènes de degré $-K$ en ξ, en-dehors d'un voisinage de 0. Lorsque K est assez grand, toutes les intégrales de la somme sont convergentes. De plus, pour tout s, α_j^K est s fois dérivable en x si K est assez grand et on peut vérifier que le théorème de convergence dominée s'applique. Donc u_+^1 est s fois dérivable en x.
Puisque c'est vrai pour tout s, u_+^1 est $\mathcal{C}^\infty$.

Pour justifier rigoureusement les égalités formelles entre intégrales qui ne convergent pas, on commence par supposer que f appartient à la classe de Schwartz ; le résultat sera ensuite étendu à toutes les fonctions L^2 par densité. Ensuite, on régularise l'intégrale au moyen de la fonction $\xi \mapsto e^{-\varepsilon|\xi|^2}$ puis on fait tendre ε vers 0 comme dans la démonstration de la formule d'inversion de Fourier.

6. La question précédente montre que, si $x_0 \notin \mathrm{Supp}(f) - t\Sigma_1(f)$, alors $x_0 \notin \mathrm{singsupp}(u_+(t))$. De la même manière, on montre que, si $x_0 \notin \mathrm{Supp}(f) + t\Sigma_1(f)$, alors $x_0 \notin \mathrm{singsupp}(u_-(t))$. Donc, si $x_0 \notin \mathrm{Supp}(f) \pm t\Sigma_1(f)$, x_0 n'appartient ni au support singulier de $u_+(t)$ ni au support singulier de $u_-(t)$ et donc, d'après la question 3., x_0 n'appartient pas au support singulier de $u(t)$ (remarquons que le support singulier est la projection sur la première coordonnée du front d'onde).
Utilisons ce résultat pour montrer le théorème demandé.
Soit x_0 tel qu'il n'existe pas $(x,\xi) \in WF(f)$ tel que $x_0 = x \pm t\frac{\xi}{|\xi|}$.
Pour tout $x' \in \mathrm{Supp}(f)$, soit $C_{x'}$ un voisinage conique fermé de $\Sigma_{x'}(f)$ tel que, pour tout $\xi \in C_{x'}$:

$$x_0 \neq x' \pm t\frac{\xi}{|\xi|}. \tag{1}$$

D'après la question 2.e) de l'exercice 1, il existe $U_{x'}$ un voisinage de x' tel que, pour toute $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support inclus dans $U_{x'}$, $\Sigma(\phi f) \subset C_{x'}$. Quitte à rétrécir $U_{x'}$, on peut de plus renforcer (1) en :

$$\forall\, x'' \in U_{x'}, \forall\, \xi \in C_{x'}, \qquad x_0 \neq x'' \pm t\frac{\xi}{|\xi|}.$$

Pour toute $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support inclus dans $U_{x'}$, on aura alors :

$$x_0 \notin \mathrm{Supp}(f\phi) \pm t\Sigma_1(f\phi). \tag{2}$$

Comme $\mathrm{Supp}(f)$ est compact, on peut choisir $U_{x'_1}, ..., U_{x'_s}$ un recouvrement de $\mathrm{Supp}(f)$ par de tels ouverts.
Soit $(\phi_1, ..., \phi_s)$ une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement. On a alors $f = (f\phi_1)+...+(f\phi_s)$ et $u = u_1 + ... + u_s$ où, pour tout $s' \leq s$, $u_{s'}$ est la solution de l'équation des ondes lorsqu'on a remplacé f par $f\phi_{s'}$.
Pour tout s', d'après la propriété (2) et la remarque faite au début de la question, $x_0 \notin \mathrm{singsupp}(u_{s'})$.
Puisque, pour tout s', $x_0 \notin \mathrm{singsupp}(u_{s'})$, $x_0 \notin \mathrm{singsupp}(u)$.

Exercice 3 : méthode des caractéristiques

1. On introduit une fonction $t \mapsto X(t)$ telle que, si f est solution de $\partial_t f + v \cdot \nabla f = 0$ alors $f(t, X(t))$ est une fonction constante. On définit $X(t) = x + vt$ avec $x \in \mathbb{R}^n$ quelconque. Alors,

$$\frac{d}{dt} f(t, x + vt) = (\partial_t f + v \cdot \nabla_x f)(t, x + vt).$$

Donc si f est solution du problème de Cauchy alors

$$f(t, X(t)) = f(t, x + vt) = f(0, X(0)) = f(0, x) = f_0(x)$$

d'où $f(t, x) = f_0(x - vt)$.
Réciproquement, on vérifie directement que $(t, x) \mapsto f_0(x - tv)$ est une fonction $\mathcal{C}^1$ qui est solution du problème de Cauchy.
2. Introduisons pour $t \geq 0$,

$$w(t) = A + B\int_0^t \phi(s)\, ds.$$

Par hypothèse, cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $w'(t) = B\phi(t) \leq Bw(t)$. Donc

$$\left(w(t)e^{-Bt}\right)' \leq 0, \quad \forall\, t \geq 0$$

et on en déduit le résultat voulu en intégrant cette inégalité.
3. Soient $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ et γ la solution maximale associée au problème de Cauchy considéré. On note $I \subset [0, T]$ l'intervalle de définition de γ qui est un voisinage de t. En utilisant l'hypothèse (**H2**), on a pour tout $s \in I$:

$$|\gamma(s)| \leq |x| + \left| \int_t^s |V(\tau, \gamma(\tau))|\, d\tau \right| \leq |x| + \kappa T + \kappa \left| \int_t^s |\gamma(\tau)|\, d\tau \right|.$$

D'après la question 2., on obtient pour tout $s \in I$:

$$|\gamma(s)| \leq (|x| + \kappa T)e^{\kappa|t-s|} \leq (|x| + \kappa T)e^{\kappa T}.$$

Supposons alors que $I \neq [0, T]$. Alors, d'après le lemme des bouts, on aurait explosion de γ à l'une (au moins) des extrémités de I i.e.

$$|\gamma(s)| \to +\infty, \quad \text{pour} \quad s \to \inf(I)^+ \quad \text{ou} \quad s \to \sup(I)^-.$$

Or ceci est exclu d'après l'estimation obtenue sur $\gamma(s)$ pour tout $s \in I$.

4. On résout l'équation et on obtient :

$$y(s) = \frac{x}{1 - (s - t)x}$$

qui est bien définie pour $s < t + 1/x$ si $x > 0$ et $s > t + 1/x$ si $x < 0$.
D'autre part, le flot caractéristique X de $\partial_t + x^2\ \partial_x$ vérifie

$$\partial_s X(s, t, x) = X(s, t, x)^2, \quad X(t, t, x) = x.$$

On a donc

$$X(s, t, x) = \frac{x}{1 - (s - t)x}$$

et donc pour $t \in \mathbb{R}$, l'application $(s, x) \mapsto X(s, t, x)$ ne peut être définie sur aucun voisinage de (t, x) de la forme $[a, b] \times \mathbb{R}$ d'après ce qui précède.

5. Pour tous t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, les applications

$$t_3 \mapsto X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) \quad \text{et} \quad t_3 \mapsto X(t_3, t_1, x)$$

sont deux courbes intégrales de V passant par $X(t_2, t_1, x)$ au temps t_2. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, l'unicité nous donne qu'elles coïncident sur tout leur intervalle maximal de définition c'est-à-dire pour tout $t_3 \in [0, T]$.

6. On utilise le théorème de dérivation des solutions d'équations différentielles par rapport à la donnée initiale qui nous dit que pout $t \in [0, T]$ fixé, l'application $(s, x) \mapsto X(s, t, x)$ admet une dérivée partielle $\partial_{x_j} X(s, t, x)$ pour tous $(s, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ et $j = 1, ..., n$. De plus, cette dérivée partielle est l'unique solution définie pour $s \in [0, T]$ de l'équation différentielle

$$\partial_s \partial_{x_j} X(s, t, x) = \nabla_x V(s, X(s, t, x))\partial_{x_j} X(s, t, x), \quad \partial_{x_j} X(t, t, x) = e_j$$

où e_j est le j-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Et on a également que l'application $(s, x) \mapsto \partial_{x_j} X(s, t, x)$ est continue sur $[0, T] \times \mathbb{R}^n$.
En combinant ceci avec l'équation différentielle écrite ci-dessus, on en déduit que pour tout $j = 1, ..., n$, la dérivée partielle seconde $(s, x) \mapsto \partial_s \partial_{x_j} X(s, t, x)$ est continue sur $[0, T] \times \mathbb{R}^n$.
D'après l'hypothèse (**H1**), $V(s, \cdot)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. L'application $X(s, t, \cdot)$ l'est aussi (on a vu qu'elle admet des dérivées partielles $\partial_{x_j} X(s, t, \cdot)$ continues sur $\mathbb{R}^n$ pour tout $j = 1, ..., n$) donc dans l'équation

$$\partial_s X(s, t, x) = V(s, X(s, t, x)), \quad (s, x) \in]0, T[\times \mathbb{R}^n,$$

le membre de droite est de classe $\mathcal{C}^1$ en x et on obtient pour tout $j = 1, ..., n$ et tout $(s, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$:

$$\partial_{x_j} \partial_s X(s, t, x) = \nabla_x V(s, X(s, t, x)) \partial_{x_j} X(s, t, x) = \partial_s \partial_{x_j} X(s, t, x).$$

7. On a vu dans la question précédente que pour tout $(s, t) \in [0, T]^2$, l'application $X(s, t, \cdot)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. D'autre part, pour $(s, t) \in [0, T]^2$, d'après la question 5. appliquée avec $t_3 = t_1 = s$ et $t_2 = t$ puis avec $t_3 = t_1 = t$ et $t_2 = s$, on a les relations suivantes :

$$X(s, t, X(t, s, x)) = X(s, s, x) = x = X(t, t, x) = X(t, s, X(s, t, x)).$$

On en déduit que $X(s, t, \cdot)$ est une bijection de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$ d'inverse $X(s, t, \cdot)^{-1} = X(t, s, \cdot)$. La bijection $X(s, t, \cdot)$ et son inverse étant de classe $\mathcal{C}^1$, on peut conclure.

8. On a vu dans la question 6. que l'application $(s, t, x) \mapsto X(s, t, x)$ définie sur $[0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}^n$ admet des dérivées partielles continues par rapport à la variable x. On a également vu qu'elle est $\mathcal{C}^1$ par rapport à la variable s puisque par définition $\partial_s X(s, t, x) = V(s, X(s, t, x))$. Il reste à voir qu'elle admet aussi une dérivée partielle continue par rapport à t.

On fixe $(s, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ alors $X(s, t, x)$ est l'unique solution de

$$F(t, y(t)) = 0 \quad \text{où} \quad F(t, y) = X(t, s, y) - x.$$

L'application $F : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $t \in [0, T]$, la matrice $\nabla_y F(t, y) = \nabla_x X(t, s, y)$ est inversible. En effet, pour tout $(s, t) \in [0, T]^2$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$, le déterminant $J(t, s, x) = \det(\nabla_x X(t, s, x))$ est non nul car c'est le déterminant jacobien du difféomorphisme $X(s, t, \cdot)$. On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites qui nous dit en particulier que la fonction $t \mapsto y(t)$ est dérivable et vérifie

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} y(t) &= -\nabla_y F(t, y(t))^{-1} \partial_t F(t, y(t)) \\
&= -\nabla_x X(t, s, X(s, t, x))^{-1} V(t, X(t, s, X(s, t, x))) \\
&= -\nabla_x X(t, s, X(s, t, x))^{-1} V(t, x).
\end{aligned}$$

Cette dernière formule montre que l'application $\partial_t X$ est continue sur $[0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}^n$.

En conclusion, l'application X admet des dérivées partielles continues en tout point sur $[0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}^n$, elle y est donc de classe $\mathcal{C}^1$.

9. On utilise l'égalité prouvée à la question 5. et on la dérive par rapport à la variable t_2 (le flot X est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}^n$) pour obtenir :

$$\partial_t X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) + \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x))\, \partial_s X_j(t_2, t_1, x) = 0$$

i.e.

$$\partial_t X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) + \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x))\, V_j(t_2, X(t_2, t_1, x)) = 0.$$

On conclut en posant $t_1 = t_2 = t$ et $t_3 = 0$.

10. Le fait que f soit $\mathcal{C}^1$ sur $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ provient du fait que f_0 est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et que l'application $(t, x) \mapsto X(0, t, x)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ d'après la question 7.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(0,x) = f_0(X(0,0,x)) = f_0(x)$.
Enfin, on a pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$:

$$\partial_t f(t,x) = \nabla f_0(X(0,t,x)) \cdot \partial_t X(0,t,x)$$

et

$$\partial_{x_j} f(t,x) = \nabla f_0(X(0,t,x)) \cdot \partial_{x_j} X(0,t,x)$$

ce qui implique que

$$\partial_t f(t,x) + V(t,x) \cdot \nabla_x f(t,x) = \nabla f_0(X(0,t,x)) \cdot \left(\partial_t X(0,t,x) + \sum_{j=1}^{n} V_j(t,x)\, \partial_{x_j} X(0,t,x) \right) = 0$$

d'après la question précédente.

Exercice 4 : équation de transport avec terme source et terme d'amortissement
La courbe caractéristique issue de y à $t=0$ pour l'opérateur de transport $\partial_t + v \cdot \nabla_x$ est :

$$\{(t, X(t)),\, t \in \mathbb{R}_+\}, \quad X(t) = y + tv.$$

Si $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ est solution de l'équation de transport donnée dans l'énoncé, alors pour tout $t > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(t, X(t)) &= \partial_t u(t, X(t)) + X'(t) \cdot \nabla_x u(t, X(t)) \\ &= (\partial_t u + v \cdot \nabla_x u)(t, X(t)) \\ &= S(t, X(t)) - a(t, X(t)) u(t, X(t)). \end{aligned}$$

On s'est ainsi ramené à la résolution d'une EDO :

$$\forall\, t > 0,\ v'(t) + \alpha(t) v(t) = \Sigma(t) \quad \text{et} \quad v(0) = u_0(y).$$

On résout cette EDO pour obtenir

$$v(t) = u_0(y) e^{-\int_0^t \alpha(\tau)\, d\tau} + \int_0^t e^{-\int_s^t \alpha(\tau)\, d\tau} \Sigma(s)\, ds.$$

On en déduit pour tout $t \geq 0$ et $y \in \mathbb{R}^n$,

$$u(t, y+tv) = u_0(y) e^{-\int_0^t a(\tau, y+\tau v)\, d\tau} + \int_0^t e^{-\int_s^t a(\tau, y+\tau v)\, d\tau} S(s, y+sv)\, ds.$$

En faisant le changement de variable $y = x - tv$, on obtient que u est donnée pour tout $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$ par

$$u(t,x) = u_0(x - tv) e^{-\int_0^t a(\tau, x+(\tau-t)v)\, d\tau} + \int_0^t e^{-\int_s^t a(\tau, x+(\tau-t)v)\, d\tau} S(s, x+(s-t)v)\, ds.$$

En procédant ainsi par condition nécessaire, on a prouvé l'unicité d'une solution dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$. Inversement, on vérifie que la formule précédente nous fournit bien une solution $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ de notre équation. Pour la régularité, comme a et S sont $\mathcal{C}^1$, en dérivant sous le signe somme, on vérifie que la fonction ainsi définie est bien dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$. Vérifions maintenant que c'est bien une solution de notre équation. Pour cela, on refait le changement de variable $y = x - tv$. On a alors pour tout $t \geq 0$ et $y \in \mathbb{R}^n$,

$$u(t, y + tv) = u_0(y)e^{-\int_0^t a(\tau, y+\tau v)\, d\tau} + \int_0^t e^{-\int_s^t a(\tau, y+\tau v)\, d\tau} S(s, y + sv)\, ds.$$

On reconnait dans le membre de droite, la solution de l'EDO

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t, y + tv) + a(t, y + tv)u(t, y + tv) = S(t, y + tv) \\ u(0, y) = u_0(y). \end{cases}$$

Sachant que $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$, dire que la fonction $t \mapsto u(t, y + tv)$ est solution de cette EDO équivaut à dire que u est solution de notre équation de transport puisque

$$\frac{d}{dt}u(t, y + tv) = (\partial_t u + v \cdot \nabla_x u)(t, y + tv)$$

ce qui nous permet de conclure.

Exercice 5 : équation de Burgers

1. Soit $X = X(s, t, x)$ le flot caractéristique de l'opérateur de transport $\partial_t + u(t, x)\partial_x$, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} \partial_s X(s, t, x) &= u(s, X(s, t, x)), \quad \forall\, s \in]0, T[, \\ X(t, t, x) &= x. \end{aligned}$$

L'existence et l'unicité locales de ce flot viennent du théorème de Cauchy-Lipschitz puisque u est $\mathcal{C}^1$. Soit $z \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$. La fonction $\phi : s \mapsto u(s, X(s, t, z))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par composition et vérifie :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}u(s, X(s, t, z)) &= \partial_s u(s, X(s, t, z)) + \partial_s X(s, t, z)\partial_x u(s, X(s, t, z)) \\ &= \partial_s u(s, X(s, t, z)) + u(s, X(s, t, z))\partial_x u(s, X(s, t, z)) \\ &= (\partial_s u + u\partial_x)(s, X(s, t, z)) = 0. \end{aligned}$$

La fonction ϕ est donc constante sur $[0, T[$, ce qui implique

$$u(s, X(s, t, z)) = u(t, X(t, t, z)) = u(t, z), \quad \forall\, s \in]0, T[.$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \partial_s X(s, t, z) &= u(s, X(s, t, z)) = u(t, z), \quad \forall\, s \in]0, T[, \\ X(t, t, z) &= z. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$X(s, t, z) = z + (s - t)u(t, z), \quad \forall\, s \in [0, T[,$$

et donc

$$X(s, 0, z) = z + su_0(z), \quad \forall\, s \in [0, T[.$$

En utilisant de nouveau que ϕ est constante sur $[0,T[$, on obtient :

$$u(s, z + s u_0(z)) = u_0(z), \quad \forall\, s \in [0,T[.$$

2. D'après la question précédente, toute solution $\mathcal{C}^1$ sur $[0,T[\times\mathbb{R}$ vérifie

$$u(t, z + t u_0(z)) = u_0(z), \quad \forall\, t \in [0,T[,\ \forall\, z \in \mathbb{R}.$$

Soient maintenant $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,T[$, alors comme la fonction $\phi_t : z \mapsto z + t u_0(z)$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, il existe un unique $z \in \mathbb{R}$ tel que $x = z + t u_0(z)$. Donc

$$u(t,x) = u(t, z + t u_0(z)) = u_0(z) = u_0(\phi_t^{-1}(x))$$

ce qui définit exactement la solution de l'équation de Burgers qu'on avait exhibée à l'exercice 2 du TD 1.

Exercice 6 : équation eikonale

1. On commence par replacer le problème dans le cadre du cours. On définit

$$\Gamma = \{(f(s), h(s)),\, s \in \mathbb{R}\}, \quad f(s) = (\cos s, \sin s) \quad \text{et} \quad h(s) = 0.$$

On définit également

$$F(x,z,p) = |p|^2 - 1, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,\, z \in \mathbb{R},\, p \in \mathbb{R}^2.$$

Ainsi, trouver une solution u du problème

$$\begin{cases} (\partial_{x_1} u)^2 + (\partial_{x_2} u)^2 = 1 & \text{sur} \quad \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ u = 0 & \text{sur} \quad \mathbb{S}. \end{cases}$$

est équivalent à trouver une solution u de $F(x,y,u,\nabla u) = 0$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ telle que Γ soit contenue dans la surface intégrale.
On commence par chercher $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ telle que pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} h'(s) = 0 = f_1'(s)\psi_1(s) + f_2'(s)\psi_2(s) \\ F(f(s), 0, \psi(s)) = 0 \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{cases} \sin s\, \psi_1(s) = \cos s\, \psi_2(s) \\ \psi_1^2(s) + \psi_2^2(s) = 1. \end{cases} \tag{3}$$

Si ces deux égalités sont vérifiées, alors $\psi_1(s) = \pm\sqrt{1 - \psi_2^2(s)}$. On en déduit $\pm \sin s \sqrt{1 - \psi_2^2(s)} = \cos s\, \psi_2(s)$ et donc $\sin^2 s\, (1 - \psi_2^2(s)) = \cos^2 s\, \psi_2^2(s)$ et donc $\psi_2(s) = \pm \sin s$. On déduit ensuite que $\psi_1(s) = \pm\sqrt{1 - \sin^2 s} = \pm \cos s$. Comme on veut aussi que la relation $\sin s\, \psi_1(s) = \cos s\, \psi_2(s)$ soit vraie pour tout $s \in \mathbb{R}$, cela nous impose $\psi(s) = (\cos s, \sin s)$ ou $\psi(s) = (-\cos s, -\sin s)$. Réciproquement, on vérifie que ψ ainsi définie satisfait (3).

On se place dans le cas où $\psi(s) = (\cos s, \sin s)$. On fixe $s \in \mathbb{R}$ et on résout le système d'équations caractéristiques

$$\begin{cases} \partial_t X = D_p F(X, Z, P) = 2p \\ \partial_t P = -D_x F(X, Z, P) - \partial_z F(X, Z, P) P = 0 \\ \partial_t Z = D_p F(X, Z, P) \cdot P = 2|P|^2 \end{cases}$$

avec donnée initiales

$$\begin{cases} X(s, 0) = f(s) = (\cos s, \sin s) \\ Z(s, 0) = h(s) = 0 \\ P(s, 0) = \psi(s) = (\cos s, \sin s). \end{cases}$$

On trouve alors

$$\begin{cases} P(s, t) = (\cos s, \sin s) \\ Z(s, t) = 2t \\ X(s, t) = (2t + 1)(\cos s, \sin s). \end{cases} \tag{4}$$

On remarque que si $x \neq (0, 0)$ alors en prenant t tel que $|x_0| = 2t + 1$ et $s = \arg(x_{0,1} + ix_{0,2})$, on a $X(s, t) = x$. Si $x = (0, 0)$, en prenant $t = -1/2$, on a $X(s, t) = x$.
On aurait pu aussi remarquer que dès que $x \neq (0, 0)$, on peut inverser la fonction $X(s, t) - x$ pour tout $t \neq -1/2$ puisque

$$\begin{vmatrix} \partial_s X_1 & \partial_s X_2 \\ \partial_t X_1 & \partial_t X_2 \end{vmatrix} (s, t) = \begin{vmatrix} -(2t + 1) \sin s & (2t + 1) \cos s \\ 2 \cos s & 2 \sin s \end{vmatrix} = -2(2t + 1)$$

qui est non nul pour tout $t \neq -1/2$. Si $x = (0, 0)$ et $t \neq -1/2$, la fonction $X(s, t) - x$ est non nulle.
Soit donc $x \neq (0, 0)$ et (s, t) tel que $X(s, t) = x$. On pose alors $u(x) = Z(s, t)$. En revenant à (4), on obtient

$$(u(x) + 1)^2 = (Z(s, t) + 1)^2 = (2t + 1)^2 = |X(s, t)|^2 = |x|^2 = x_1^2 + x_2^2$$

et donc $u(x) = -1 \pm \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Comme on veut de plus que $u(x) = 0$ si $|x| = 1$, on en déduit $u(x) = -1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ pour tout $x \neq (0, 0)$.
En choisissant $\psi(s) = (-\cos s, -\sin s)$, on trouve $u(x) = 1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ pour tout $x \neq (0, 0)$.
2. On définit

$$\Gamma = \{(f(s), h(s)),\ s \in \mathbb{R}\} \quad f(s) = (1, s),$$

$a(x, u) = (1, x_1)$ et $c(x, u) = u$. On écrit les équations caractéristiques

$$\begin{cases} \partial_t X = a(X, Z) = (1, X_1) \\ \partial_t Z = c(X, Z) = Z \end{cases}$$

avec les conditions initiales $X(s, 0) = f(s) = (1, s)$ et $Z(s, 0) = h(s)$. On résout pour obtenir

$$X(s, t) = (1 + t, s + t + t^2/2) \quad \text{et} \quad Z(s, t) = h(s)e^t.$$

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}^2$, on cherche (s, t) tel que $X(s, t) = x$ i.e. $(1+t, s+t+t^2/2) = (x_1, x_2)$. On pose $t = x_1 - 1$ et $s = x_2 - (x_1 - 1)^2/2 - (x_1 - 1)$. On pourrait aussi remarquer que l'équation $X(s, t) - x$ est toujours inversible car

$$\begin{vmatrix} \partial_s X_1 & \partial_s X_2 \\ \partial_t X_1 & \partial_t X_2 \end{vmatrix} (s, t) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 + t \end{vmatrix} = -1.$$

On a alors $X(s,t) = x$. En posant $u(x) = Z(s,t) = h(x_2 - (x_1-1)^2/2 - (x_1-1))e^{x_1-1}$, on obtient une solution de notre équation.