Corrigé n°4

Exercice 1 : fonctions semi-continues

Dans la suite, $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

1. Par définition, on a

$$\varliminf_{x\to x_0} u(x) = \sup_{\delta>0} \inf_{|x-x_0|<\delta} u(x).$$

En utilisant maintenant la définition d'un sup, on obtient

$$\begin{aligned}\varliminf_{x\to x_0} u(x) \geq u(x_0) &\Leftrightarrow \forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\delta>0,\ \inf_{|x-x_0|<\delta} u(x) \geq u(x_0)-\varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\delta>0,\ (|x-x_0|<\delta \Rightarrow u(x)\geq u(x_0)-\varepsilon) \\ &\Leftrightarrow u \text{ est sci en } x_0.\end{aligned}$$

2. On considère u sci sur Ω. Montrons que si $((x_n,r_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\operatorname{epi} u$ qui converge vers (x,r) alors $u(x)\leq r$. En effet, on a :

$$r = \lim_{n\to+\infty} r_n = \varliminf_{n\to+\infty} r_n \geq \varliminf_{n\to+\infty} u(x_n)$$

puisque $(x_n,r_n)\in \operatorname{epi} u$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Puis u étant sci en x_n par hypothèse, on a d'après la question 1,

$$\varliminf_{n\to+\infty} u(x_n) = \varliminf_{z\to x} u(z) \geq u(x),$$

ce qui permet de conclure pour la première implication.

Respectivement, montrons que si $\operatorname{epi} u$ est fermé alors u est sci sur Ω par l'absurde. On suppose donc que $\operatorname{epi} u$ est fermé et qu'il existe $x\in\Omega$ tel que $u(x) > \varliminf_{z\to x} u(z)$. On choisit ensuite une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Ω qui réalise cette $\liminf$: $\varliminf_{z\to x} u(z) = \lim_{n\to\infty} u(x_n)$ avec $x_n\to x$. On pose $r_n = u(x_n)$ pour tout n de sorte que $(x_n,r_n)\in\operatorname{epi} u$ pour tout n. La suite (x_n,r_n) est une suite convergente vers $(x,\varliminf_{z\to x} u(z))$ de $\operatorname{epi} u$ qui est fermé donc $(x,\varliminf_{z\to x} u(z))\in\operatorname{epi} u$, ce qui est absurde.

3. Montrons d'abord le sens indirect. On suppose donc qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{C}(\Omega)$ croissante telle qui converge simplement vers u sur Ω. Soit $x_0\in\Omega$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$\varliminf_{x\to x_0} u(x) = \sup_{\varepsilon>0} \inf_{|x-x_0|<\varepsilon} u(x) \geq \sup_{\varepsilon>0} \inf_{|x-x_0|<\varepsilon} u_n(x) = \varliminf_{x\to x_0} u_n(x) = \lim_{x\to x_0} u_n(x) = u_n(x_0).$$

En passant à la limite $n\to+\infty$, on obtient $\varliminf_{x\to x_0} u(x)\geq u(x_0)$.

Inversement, traitons d'abord le cas où u est à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$. Pour tout $x\in\Omega$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, on définit

$$u_n(x) = \inf_{y\in\Omega} \{u(y) + n|x-y|\}.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est clairement une suite croissante de fonctions, montrons que pour tout n, u_n est une fonction continue. Pour cela, on considère $x\in\Omega$ et une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\Omega^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x. On a alors,

$$\begin{aligned} u_n(x_k) &= \inf_{y\in\Omega}\{u(y)+n|x_k-y|\} \\ &\leq \inf_{y\in\Omega}\{u(y)+n|x-y|\} + n|x-x_k| \\ &\leq u(x) + n|x-x_k| \xrightarrow[k\to+\infty]{} u(x).\end{aligned}$$

On montre de même que

$$u_n(x_k) \geq u(x) - n|x - x_k| \xrightarrow[k \to +\infty]{} u(x)$$

et donc u_n est continue en x. Montrons maintenant que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers u. Soit $x \in \Omega$, la fonction u étant sci en x, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|x - z| < \delta \Rightarrow u(z) \geq u(x) - \varepsilon$. On a

$$u_n(x) \geq \min(n\delta, u(x) - \varepsilon).$$

En effet, si $y \in \Omega$ et $|x - y| \leq \delta$, $u(y) + n|x - y| \geq u(y) \geq u(x) - \varepsilon$. Si $y \in \Omega$ et $|x - y| \geq \delta$, $u(y) + n|x - y| \geq n|x - y| \geq n\delta$. Donc $u_n(x) = \inf_{y\in\Omega}\{u(y) + n|x - y|\} \geq \min(n\delta, u(x) - \varepsilon)$. De cette inégalité, on déduit que si $n \geq u(x)/\delta$, on a $u_n(x) \geq u(x) - \varepsilon$. Comme par ailleurs, on a $u_n(x) \leq u(x)$, on en déduit que $u_n(x)$ converge vers $u(x)$. Remarquons que cette inégalité appliquée avec $\varepsilon = u(x)/2$ implique aussi que u_n est strictement positive.
Pour conclure dans le cas où u n'est pas strictement positive, on pose $v = e^u$ qui est strictement positive et sci. D'après ce qui précède, il existe une suite croissante de fonctions continues v_n strictement positives qui converge vers v. On pose ensuite $u_n = \log v_n$, ce qui nous donne le résultat.

Exercice 2 : enveloppes scs et semi-limites relaxées

1. On a $u^\alpha \leq (u^\alpha)^*$ donc $\sup_\alpha u^\alpha \leq \sup_\alpha (u^\alpha)^*$. En prenant l'enveloppe scs des deux côtés (on rappelle que l'enveloppe scs d'une fonction est la plus petite fonction scs supérieure à cette fonction), on obtient

$$\left(\sup_{\alpha\in\mathcal{A}} u^\alpha\right)^* \leq \left(\sup_{\alpha\in\mathcal{A}} (u^\alpha)^*\right)^*.$$

Inversement, posons $u = \sup_\alpha u^\alpha$. Pour tout α, on a $u \geq u^\alpha$ et donc $u^* \geq (u^\alpha)^*$. Puis en prenant le sup en α, on obtient $u^* \geq \sup_\alpha (u^\alpha)^*$ puis on conclut en prenant de nouveau l'enveloppe scs des deux côtés.
2. On a $u^\varepsilon \leq (u^\varepsilon)^*$ donc

$$\overline{\lim_\varepsilon}^* u^\varepsilon \leq \overline{\lim_\varepsilon}^* (u^\varepsilon)^*.$$

Inversement, soit $x_0 \in \Omega$, il existe des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Omega^\mathbb{N}$ et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_*^+)^\mathbb{N}$ telles que $x_n \to x_0$, $\varepsilon_n \to 0$ et

$$\overline{\lim_\varepsilon}^* (u^\varepsilon)^*(x_0) = \lim_{n\to+\infty} (u^{\varepsilon_n})^*(x_n).$$

Puis comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u^{\varepsilon_n})^*(x_n) = \overline{\lim}_{y\to x_n} u^{\varepsilon_n}(y)$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une suite $(y_{n_p})_{p\in\mathbb{N}} \in \Omega^\mathbb{N}$ telle que $y_{n_p} \to x_n$ et

$$(u^{\varepsilon_n})^*(x_n) = \lim_{p\to+\infty} u^{\varepsilon_n}(y_{n_p}).$$

Pour tout n, on choisit p_n assez grand pour que

$$\left|u^{\varepsilon_n}\left(y_{n_{p_n}}\right) - (u^{\varepsilon_n})^*(x_n)\right| \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |y_{n_{p_n}} - x_n| \leq \frac{1}{n}.$$

On peut alors écrire :

$$\overline{\lim_\varepsilon}^* (u^\varepsilon)^*(x_0) = \lim_{n\to+\infty} (u^{\varepsilon_n})^*(x_n) = \lim_{n\to+\infty} u^{\varepsilon_n}\left(y_{n_{p_n}}\right) \leq \overline{\lim_\varepsilon}^* u^\varepsilon.$$

Exercice 3 : sous-différentiels

1. On suppose que $(p, X) \in D^{2,+}u(x_0)$. Soit donc $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ touchant u par dessus en x_0 telle que $(p, X) = (\nabla\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0))$. Donc $\varphi - u$ admet un min local en x_0 et est localement $\mathcal{C}^2$ donc $p - \nabla u(x_0) = 0$ et $X - D^2u(x_0) \geq 0$. Inversement, si $p = \nabla u(x_0)$ et $X \geq D^2u(x_0)$, on pose

$$\varphi(x) = u(x) + \frac{1}{2}(X - D^2u(x_0))(x - x_0) \cdot (x - x_0).$$

On a alors $\varphi(x_0) = u(x_0)$, $\nabla\varphi(x_0) = p$ et $D^2\varphi(x_0) = X$. De plus,

$$\varphi(x) - u(x) = \frac{1}{2}(X - D^2u(x_0))(x - x_0) \cdot (x - x_0).$$

Comme $X - D^2u(x_0) \geq 0$, on en déduit que dans un voisinage de x_0, on aura $\varphi - u \geq 0$ donc φ touche u par dessus en x_0. On peut conclure que

$$D^{2,+}u(x_0) = \left\{(\nabla u(x_0), X),\ X \geq D^2u(x_0)\right\}.$$

De même, on montre que

$$D^{2,-}u(x_0) = \left\{(\nabla u(x_0), X),\ X \leq D^2u(x_0)\right\}.$$

2. On suppose que $(p, X) \in D^{2,-}u(x_0)$. Soit donc $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ touchant u par dessous en x_0 telle que $(p, X) = (\nabla\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0))$. On a donc $u \geq \varphi$ au voisinage de x_0 et $u(x_0) = \varphi(x_0)$. Par ailleurs, dans ce voisinage de x_0, on a :

$$\begin{aligned}
u(x) \geq \varphi(x) &= \varphi(x_0) + \nabla\varphi(x) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2}D^2\varphi(x_0)(x - x_0) \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|^2) \\
&= u(x_0) + p \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2}X(x - x_0) \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|^2).
\end{aligned}$$

Réciproquement, on suppose qu'au voisinage de x_0, on a :

$$u(x) - u(x_0) \geq p \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2}X(x - x_0) \cdot (x - x_0) + \varepsilon(x - x_0)|x - x_0|^2$$

où ε est une fonction localement bornée qui tend vers 0 en 0. Soit η la fonction donnée par le lemme admis dans l'énoncé. On pose

$$\varphi(x) = u(x_0) + p \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2}X(x - x_0) \cdot (x - x_0) - |x - x_0|^2\eta(x - x_0).$$

Alors $u \geq \varphi$ au voisinage de x_0 et φ est $\mathcal{C}^\infty$ en dehors de x_0. De plus, en notant e_j le j-ème vecteur de la base canonique, on a

$$\frac{\varphi(x_0 + he_j) - \varphi(x_0)}{h} = \frac{hp \cdot e_j + \frac{1}{2}h^2Xe_j \cdot e_j + h^2\eta(he_j)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} p_j$$

donc φ est dérivable en x_0 et $\nabla\varphi(x_0) = p$. Par ailleurs, pour tout $x \neq x_0$, on a

$$\nabla\varphi(x) = p + X(x - x_0) - 2(x - x_0)\eta(x - x_0) - |x - x_0|^2\nabla\eta(x - x_0).$$

Montrons maintenant que pour tout i, $\partial_i \varphi$ est dérivable en x_0 :

$$\frac{\partial_i \varphi(x_0 + he_j) - \partial_i \varphi(x_0)}{h} = \frac{p_j + hX_{ij} - 2h\eta(he_j) - h^2 \partial_j \eta(he_i)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} X_{ij}.$$

Donc $D^2\varphi(x_0)$ existe et vaut X. De plus, pour $x \neq x_0$, on a

$$\begin{aligned}\partial_{i,j}\varphi(x) = X_{ij} &- 2\eta(x - x_0)\delta_{ij} - 2(x_i - x_{0,i})\partial_j \eta(x - x_0) - 2(x_j - x_{0,j})\partial_i \eta(x - x_0) \\ &- |x - x_0|^2 \partial_{ij}\eta(x - x_0) \xrightarrow[x \to x_0]{} X_{ij}.\end{aligned}$$

Donc $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ touche u par dessous en x_0 et $(p, X) = (\nabla\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0))$.
3. Pour $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, il existe un voisinage U de x_0 tel que $u \in \mathcal{C}^2(U)$. Donc d'après la question précédente, si $x_0 \in] - \pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi[$ on a :

$$D^{2,-}u(x_0) = \big\{(u'(x_0), X),\ X \le u''(x_0)\big\} = \{(-\sin x_0, X),\ X \le -\cos x_0\}$$

et si $x_0 \in]\pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi[$, on a :

$$D^{2,-}u(x_0) = \big\{(u'(x_0), X),\ X \le u''(x_0)\big\} = \{(\sin x_0, X),\ X \le \cos x_0\}.$$

On ne traite maintenant que le cas $x_0 = \pi/2$. Montrons que $D^{2,-}u(x_0) =] - 1, 1[\times\mathbb{R} \cup \{\pm 1\} \times \mathbb{R}^-$. D'après la question précédente, dire que $(p, X) \in D^{2,-}u(x_0)$ est équivalent à dire qu'au voisinage de x_0,

$$u(x) \ge u(x_0) + p(x - x_0) + \frac{1}{2}X(x - x_0)^2 + o(|x - x_0|^2). \tag{1}$$

Si $x < x_0 = \pi/2$, l'inégalité (1) se réécrit

$$\cos x - p(x - x_0) - \frac{1}{2}X(x - x_0)^2 + o(|x - x_0|^2) \ge 0$$

ou encore, en faisant un DL de cos en $\pi/2$:

$$(x_0 - x)(1 + p) - \frac{1}{2}X(x - x_0)^2 + o(|x - x_0|^2) \ge 0.$$

De ceci, on déduit que si $1 + p > 0$, cette condition est réalisable pour tout $X \in \mathbb{R}$, et que si $1 + p < 0$, cette condition n'est réalisable pour aucun $X \in \mathbb{R}$.
Si $x > x_0 = \pi/2$, l'inégalité (1) se réécrit

$$-\cos x - p(x - x_0) - \frac{1}{2}X(x - x_0)^2 + o(|x - x_0|^2) \ge 0$$

ou encore, en faisant un DL de cos en $\pi/2$:

$$(x_0 - x)(-1 + p) - \frac{1}{2}X(x - x_0)^2 + o(|x - x_0|^2) \ge 0.$$

De ceci, on déduit que si $-1 + p < 0$, cette condition est réalisable pour tout $X \in \mathbb{R}$, et que si $-1 + p > 0$, cette condition n'est réalisable pour aucun $X \in \mathbb{R}$. En conclusion, l'inégalité (1) est vraie dans un voisinage de x_0 si $(p, X) \in] - 1, 1[\times\mathbb{R}$ et ne peut pas l'être dans le cas où $p \notin [-1, 1]$.

En reprenant les calculs précédents, on s'aperçoit que si $p = \pm 1$ et $X < 0$, l'inégalité (1) est réalisée et que si $X > 0$, elle ne peut être réalisée. Donc $\{\pm 1\} \times \mathbb{R}_*^- \subset D^{2,-}u(x_0)$ et $(-1, X) \notin D^{2,-}u(x_0)$ pour tout $X > 0$.
Enfin, on considère le cas $p = \pm 1$ et $X = 0$. Pour cela, on revient à la définition du sous-différentiel. Si $p = -1$, on pose $\varphi(x) = \cos x$ qui vérifie $\varphi \leq u$, $\varphi(x_0) = u(x_0) = 0$, $\varphi'(x_0) = -1$ et $\varphi''(x_0) = 0$ donc $(-1, 0) \in D^{2,-}u(x_0)$. De même, en posant $\varphi(x) = -\cos x$, on prouve que $(1, 0) \in D^{2,-}u(x_0)$.
En conclusion, on a prouvé que $D^{2,-}u(x_0) =]-1, 1[\times \mathbb{R} \cup \{\pm 1\} \times \mathbb{R}^-$.

4. Montrons d'abord l'équivalence entre (i) et (ii). Supposons que (ii) est vérifié. Alors il existe φ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $u - \varphi$ atteint un minimum local en x_0 et $(p, X) = (\nabla\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0))$. Quitte à ajouter une constante à φ (ce qui ne change pas ses dérivées), on peut supposer que ce minimum vaut 0. On a alors au voisinage de x_0,

$$u(x) \geq \varphi(x) = u(x_0) + p \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2}X(x - x_0) \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|^2)$$

ce qui permet d'après la question 2. de montrer que $(p, X) \in D^{2,-}u(x_0)$.
Inversement, supposons que $(p, X) \in D^{2,-}u(x_0)$. On a alors

$$u(x) \geq u(x_0) + p \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2}X(x - x_0) \cdot (x - x_0) + |x - x_0|^2 \varepsilon(x - x_0)$$

où ε est localement bornée et $\varepsilon(y) \to 0$ lorsque $y \to 0$. Soit η associé à ε donné par le lemme admis dans la question 2. On pose alors

$$\varphi(x) = u(x_0) + p \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2}X(x - x_0) \cdot (x - x_0) - |x - x_0|^2 \eta(x - x_0)$$

de sorte que φ est régulière en dehors de x_0, inférieure à u dans un voisinage de x_0 et égale à u en x_0. Autrement dit, $u - \varphi$ admet un minimum local en x_0. De plus, comme à la question 2., on peut prouver que φ est régulière en x_0 de gradient p et de matrice hessienne X. Ceci conclut la preuve de $(i) \Rightarrow (ii)$.
Montrons qu'on peut toujours passer d'un minimum (local ou global) à un minimum strict. Si $u - \varphi$ atteint un minimum en x_0, alors la fonction $u - (\varphi - |\cdot - x_0|^4)$ y admet un minimum strict. En effet, si $x \neq x_0$, on a :

$$u(x_0) - (\varphi(x_0) - |x_0 - x_0|^4) = u(x_0) - \varphi(x_0) \leq u(x) - \varphi(x) < u(x) - (\varphi(x) - |x - x_0|^4).$$

De plus, $\psi = \varphi - |\cdot - x_0|^4$ est $\mathcal{C}^2$ et a les mêmes gradient et matrice hessienne que φ en x_0. Avec ceci, on a montré que $(ii) \Leftrightarrow (iii)$.

5. On peut donner la définition suivante : $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est sur-solution de viscosité sur Ω si u est localement bornée inférieurement et si pour tout $x_0 \in \Omega$ et tout $(p, X) \in D^{2,-}u_*(x_0)$, alors $F(x_0, u(x_0), p, X) \geq 0$. .

Exercice 4 : plusieurs définitions des solutions de viscosité

1. On suppose que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ telle que $u_* - \varphi$ admet un minimum local en x_0, on a $F(x_0, u_*(x_0), \nabla\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \geq 0$. Montrons que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ qui touche u_* par dessous en x_0, on a $F(x_0, u_*(x_0), \nabla\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \geq 0$. On considère $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ qui touche u_* par dessous en x_0, alors $u_* - \varphi \geq 0$ au voisinage de x_0 et $u_*(x_0) - \varphi(x_0) = 0$. Donc $u_* - \varphi$ admet un minimum local en x_0 et donc $F(x_0, u_*(x_0), \nabla\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \geq 0$.

Inversement, on suppose que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ qui touche u_* par dessous en x_0, on a l'inégalité $F(x_0, u_*(x_0), \nabla\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \geq 0$. Soit alors $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ qui admet un minimum local en x_0 et $\psi = \varphi - (\varphi(x_0) - u_*(x_0))$. On a $\psi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, $\psi(x_0) = u(x_0)$ et au voisinage de x_0,

$$u_* - \psi = u_* - \varphi + \varphi(x_0) - u_*(x_0) \geq u_*(x_0) - \varphi(x_0) + \varphi(x_0) - u_*(x_0) = 0$$

car $u_* - \varphi$ admet un minimum local en x_0. Ainsi, la fonction ψ touche u_* par dessous en x_0 et de plus, $\nabla\psi(x_0) = \nabla\varphi(x_0)$ et $D^2\psi(x_0) = D^2\varphi(x_0)$. On en déduit que $F(x_0, u_*(x_0), \nabla\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \geq 0$.

2. On suppose que u est sur-solution de viscosité quand on prend des fonctions test dans $\mathcal{C}^\infty$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ telle que $u_* - \varphi$ admet un minimum local en x_0. On a :

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \nabla\varphi(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} D^2\varphi(x_0)(x - x_0) \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|^2).$$

Pour $\varepsilon > 0$, on définit alors ψ_ε par

$$\psi_\varepsilon(x) = \varphi(x_0) + \nabla\varphi(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} D^2\varphi(x_0)(x - x_0) \cdot (x - x_0) - \varepsilon|x - x_0|^2.$$

Dans un voisinage de x_0, ψ_ε sera inférieure à φ. Donc dans ce voisinage, on aura

$$u_* - \psi_\varepsilon \geq u_* - \varphi \geq u_*(x_0) - \varphi(x_0) = u_*(x_0) - \psi_\varepsilon(x_0)$$

et donc $u_* - \psi_\varepsilon$ admet un minimum local en x_0 et puisque $\psi_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, on en déduit qu'on a

$$F(x_0, u_*(x_0), \nabla\psi_\varepsilon(x_0), D^2\psi_\varepsilon(x_0)) \geq 0.$$

Or $F(x_0, u_*(x_0), \nabla\psi_\varepsilon(x_0), D^2\psi_\varepsilon(x_0)) = F(x_0, u_*(x_0), \nabla\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0) - 2\varepsilon \mathrm{Id})$ donc

$$F(x_0, u_*(x_0), \nabla\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0) - 2\varepsilon \mathrm{Id}) \geq 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Puisque F est continue, on peut faire tendre ε vers 0 dans cette dernière inégalité et on obtient

$$F(x_0, u_*(x_0), \nabla\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \geq 0.$$

On en conclut que u est aussi sur-solution en prenant des fonctions test $\mathcal{C}^2$.

3. Dans cette question, on suppose que F ne dépend pas de la variable A. On considère u une sur-solution avec fonctions test $\mathcal{C}^2$. Soit ensuite $\varphi \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ telle que $u_* - \varphi$ a un minimum local en x_0. Quitte à ajouter une constante à φ, on peut supposer que ce minimum est nul. D'après l'exercice précédent, on peut aussi supposer que ce minimum est strict.

Soit φ_n une suite de fonctions de $\mathcal{C}^2(\Omega)$ qui converge localement uniformément vers φ et telle que $\nabla\varphi_n$ converge également localement uniformément vers $\nabla\varphi$ sur Ω.

D'après ce qui précède, il existe $r > 0$ tel que 0 est un minimum local strict de $u_* - \varphi$ sur $\overline{B}(x_0, r)$ qui est atteint en x_0. Puisque u_* est sci, $a = \inf_{\partial B(x_0,r)}(u_* - \varphi) > 0$. En effet, on peut écrire que $a = \lim_{n\to+\infty}(u_* - \varphi)(x_n)$ où $(x_n)_n$ est une suite de $\partial B(x_0, r)$. Cet ensemble étant compact, il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ qui converge vers un point $x \in \partial B(x_0, r)$. De ceci, comme $u_* - \varphi$ est sci, on déduit

$$a = \varliminf_{n\to+\infty}(u_* - \varphi)(x_n) = \varliminf_{k\to+\infty}(u_* - \varphi)(x_{n_k}) \geq (u_* - \varphi)(x) \geq a,$$

ce qui prouve bien que l'inf est atteint et comme x_0 est un minimum local strict sur $\overline{B}(x_0,r)$, $u_*-\varphi>0$ sur $\partial B(x_0,r)$ et donc $a>0$.
Puis, il existe $n_r\in\mathbb{N}$ tel que

$$\sup_{\partial B(x_0,r)} |\varphi_{n_r}-\varphi| < a/2 \quad \text{et} \quad u_*(x_0)-\varphi_{n_r}(x_0)=\varphi(x_0)-\varphi_{n_r}(x_0)<a/2.$$

Pour ce n_r, on a

$$\inf_{\overline{B}(x_0,r)} (u_*-\varphi_{n_r}) \le u(x_0)-\varphi_{n_r}(x_0) < a/2.$$

De plus, cette inf n'est pas atteint sur le bord car sur $\partial B(x_0,r)$, on a :

$$u_*-\varphi_{n_r}=u_*-\varphi+\varphi-\varphi_{n_r}\ge a-a/2\ge a/2.$$

On note x_r le point de $B(x_0,r)$ où ce minimum est atteint, c'est un minimum local sur $B(x_0,r)$ (voisinage de x_r) de $u_*-\varphi_{n_r}$ donc

$$F(x_r,u_*(x_r),\nabla\varphi_{n_r}(x_r))\ge 0. \tag{2}$$

Lorsque $r\to 0$, on a $x_r\to x_0$ et $\nabla\varphi_{n_r}\to\nabla\varphi$ (en prenant $n_r\to+\infty$ lorsque $r\to 0$) localement uniformément donc $\nabla\varphi_{n_r}(x_r)\to\nabla\varphi(x_0)$ car $\nabla\varphi$ est continue. Montrons maintenant que $u_*(x_r)\to u(x_0)$. On a :

$$\begin{aligned} u_*(x_r) &= (u_*-\varphi_{n_r})(x_r)+\varphi_{n_r}(x_r)=\varphi_{n_r}(x_r)+\inf_{\overline{B}(x_0,r)}(u_*-\varphi_{n_r}) \\ &\le \varphi_{n_r}(x_r)+\inf_{\overline{B}(x_0,r)}(u_*-\varphi)+\sup_{\overline{B}(x_0,r)}|\varphi-\varphi_{n_r}| \\ &= \varphi_{n_r}(x_r)+\sup_{\overline{B}(x_0,r)}|\varphi-\varphi_{n_r}| \end{aligned}$$

puisque $(u_*-\varphi)(x_0)=0$ et $u_*-\varphi\ge 0$ sur $\overline{B}(x_0,r)$. Par convergence locale uniforme de φ_{n_r} vers φ, on obtient

$$\overline{\lim_{r\to 0}}\, u_*(x_r)\le\varphi(x_0)=u_*(x_0).$$

Comme u_* est sci, on a aussi

$$u_*(x_0)\le\underline{\lim_{r\to 0}}\, u_*(x_r).$$

En combinant les deux inégalités précédentes, on obtient $u_*(x_r)\to u_*(x_0)$. En passant à la limite dans (2), on obtient le résultat voulu.