Corrigé n°5

Exercice 1 : unicité pour l'équation eikonale

1. On considère la différence $v_1 - v_2$, elle est continue sur $[-1,1]$ donc est bornée et atteint ses bornes. On veut montrer que son maximum est négatif. Soit $x_0 \in [-1,1]$ le point où $v_1 - v_2$ atteint son maximum. Si $x_0 \in \{\pm 1\}$, c'est terminé par hypothèse. Sinon, $x_0 \in]-1,1[$ et alors $v_1'(x_0) - v_2'(x_0) = 0$. En prenant v_2 comme fonction test, le fait que v_1 soit sous-solution de viscosité de $v + |v'| = 0$ implique $v_1(x_0) + |v_2'(x_0)| \leq 0$. De même, en prenant v_1 comme fonction test, le fait que v_2 soit sur-solution de viscosité de $v + |v'| = 0$ implique que $v_2(x_0) + |v_1'(x_0)| \geq 0$. Puisque $v_1'(x_0) = v_2'(x_0)$, on en déduit que $v_1(x_0) - v_2(x_0) \leq 0$, ce qui permet de conclure.

2. On veut montrer que $M = \sup_{[-1,1]}(v_1 - v_2) \leq 0$ (qui est bien défini et atteint car v_1 est scs et v_2 est sci). Par l'absurde, on suppose que $M > 0$. On utilise la méthode de dédoublement des variables et on introduit

$$M_\varepsilon = \sup_{(x,y)\in[-1,1]^2} \left\{ v_1(x) - v_2(y) - \frac{(x-y)^2}{2\varepsilon} \right\} \geq M > 0.$$

Notons que puisque v_1 est scs et v_2 est sci, M_ε est bien défini et est atteint en un point $(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \in [-1,1]^2$ et $M_\varepsilon \geq M$ puisque le max sur (x,y) est supérieure au max sur $x = y$. De plus, $(M_\varepsilon)_\varepsilon$ est croissante en ε car si $\varepsilon \leq \varepsilon'$, on a $-\frac{(x-y)^2}{2\varepsilon} \leq -\frac{(x-y)^2}{2\varepsilon'}$. Donc $(M_\varepsilon)_\varepsilon$ converge vers un certain $L \geq M$.
On a, par définition de $M_{2\varepsilon}$,

$$\begin{aligned} M_{2\varepsilon} &\geq v_1(x_\varepsilon) - v_2(y_\varepsilon) - \frac{(x_\varepsilon - y_\varepsilon)^2}{4\varepsilon} \\ &\geq v_1(x_\varepsilon) - v_2(y_\varepsilon) - \frac{(x_\varepsilon - y_\varepsilon)^2}{2\varepsilon} + \frac{(x_\varepsilon - y_\varepsilon)^2}{4\varepsilon} \\ &= M_\varepsilon + \frac{(x_\varepsilon - y_\varepsilon)^2}{4\varepsilon}. \end{aligned}$$

Donc par convergence de $(M_\varepsilon)_\varepsilon$,

$$(x_\varepsilon - y_\varepsilon)^2 \leq 4\varepsilon(M_{2\varepsilon} - M_\varepsilon) = o(\varepsilon).$$

Quitte à extraire une suite, on peut supposer que $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ converge dans $[-1,1]^2$, et d'après ce qui précède, $x_\varepsilon - y_\varepsilon \to 0$ donc les deux suites ont la même limite, on la note x_0.
Puisque v_1 est scs et v_2 est sci (donc $-v_2$ est scs) et $(x_\varepsilon - y_\varepsilon)^2/\varepsilon \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$,

$$\begin{aligned} M \leq L = \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\, M_\varepsilon &= \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \left\{ v_1(x_\varepsilon) - v_2(y_\varepsilon) - \frac{(x_\varepsilon - y_\varepsilon)^2}{2\varepsilon} \right\} \\ &\leq v_1(x_0) - v_2(x_0) \leq M. \end{aligned}$$

Ceci prouve que x_0 est un point qui réalise M et $x_0 \in]-1,1[$ puisque $v_1(\pm 1) \leq v_2(\pm 1)$ et $M > 0$.
Soit $\varphi : x \mapsto v_2(y_\varepsilon) + \frac{(x-y_\varepsilon)^2}{2\varepsilon}$. On remarque que la fonction $v_1 - \varphi$ atteint son maximum sur $[-1,1]$ en x_ε. De plus, comme $x_0 = \lim_{\varepsilon\to 0} x_\varepsilon \in]-1,1[$, pour ε assez petit, on a $x_\varepsilon \in]-1,1[$. En utilisant que v_1 est sous-solution de viscosité de $v + |v'| = 0$ en x_ε et en prenant φ comme fonction test, on a :

$$v_1(x_\varepsilon) + \left| \frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon} \right| \leq 0.$$

De même, en prenant $\psi : y \mapsto v_1(x_\varepsilon) - \frac{|x_\varepsilon - y|^2}{2\varepsilon}$ comme fonction test et en utilisant que v_2 est sur-solution en y_ε, on a pour ε assez petit :

$$v_2(y_\varepsilon) + \left| \frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon} \right| \geq 0.$$

Les deux inégalités précédentes impliquent que $v_1(x_\varepsilon) - v_2(y_\varepsilon) \leq 0$. Or

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \, (v_1(x_\varepsilon) - v_2(y_\varepsilon)) = M,$$

on obtient donc $M \leq 0$, ce qui est en contradiction avec notre hypothèse de départ.

3. On suppose que u est une sous-solution de viscosité scs de $|u'| - 1 = 0$ sur $]-1, 1[$. Soit $x_0 \in]-1, 1[$ et soit $\varphi \in \mathcal{C}^2(]-1, 1[)$ qui touche $v = -e^{-u}$ par dessus en x_0. On a alors $\varphi(x_0) = -e^{-u(x_0)} < 0$. Donc, localement au voisinage de x_0, $\varphi < 0$. On définit alors $\psi = -\ln(-\varphi)$ sur ce voisinage de x_0. Alors ψ est $\mathcal{C}^2$ au voisinage de x_0 et touche u par dessus en x_0. Donc comme u est une sous-solution de viscosité scs de $|u'| - 1 = 0$ sur $]-1, 1[$, on a $|\psi'(x_0)| - 1 \leq 0$. Par ailleurs, au voisinage de x_0, on a $\psi'(x) = \varphi'(x)/\varphi(x)$. Donc $|\varphi'(x_0)| + \varphi(x_0) \leq 0$ i.e. $|\varphi'(x_0)| + v(x_0) \leq 0$. On peut conclure que v est une sous-solution de viscosité scs de $v + |v'| = 0$ sur $]-1, 1[$. La réciproque est traitée de la même manière et le cas des sur-solutions aussi.

4. On montre d'abord un principe de comparaison pour l'équation $|u'| - 1 = 0$ sur $]-1, 1[$. Soient u_1 (resp. u_2) une sous-solution de viscosité scs (resp. une sur-solution de viscosité sci) de $|u'| - 1 = 0$ sur $]-1, 1[$ telles que $u_1 \leq u_2$ sur $\{\pm 1\}$. On définit alors $v_i = -e^{-u_i}$ pour $i = 1, 2$. On a ainsi $v_1 \leq v_2$ sur $\{\pm 1\}$ et d'après la question 3., v_1 (resp. u_2) est une sous-solution de viscosité scs (resp. une sur-solution de viscosité sci) de $v + |v'| = 0$ sur $]-1, 1[$. Donc, d'après la question 2., $v_1 \leq v_2$ sur $[-1, 1]$ et donc $u_1 \leq u_2$ sur $[-1, 1]$.
Prouvons maintenant l'unicité des solutions de viscosité continues de l'équation $|u'| - 1 = 0$ sur $]-1, 1[$ avec $u(1) = u(-1) = 0$. Si u_1 et u_2 sont deux solutions de viscosité continues de $|u'| - 1 = 0$ sur $]-1, 1[$ avec $u_1(1) = u_1(-1) = u_2(1) = u_2(-1) = 0$ alors, en particulier, u_1 est une sous-solution scs de $|u'| - 1 = 0$ sur $]-1, 1[$ et u_2 une sur-solution sci de $|u'| - 1 = 0$ sur $]-1, 1[$. Comme de plus $u_1 \leq u_2$ sur $\{\pm 1\}$, d'après ce qui précède, on en déduit que $u_1 \leq u_2$ sur $[-1, 1]$. Par symétrie du problème, on a aussi $u_2 \leq u_1$ sur $[-1, 1]$. Donc $u_1 = u_2$ sur $[-1, 1]$.
Enfin, il reste à vérifier que U est bien une solution de viscosité continue de

$$\begin{cases} |u'| - 1 = 0 \quad \text{sur} \quad]-1, 1[\\ u(1) = u(-1) = 0. \end{cases}$$

La fonction U est bien continue sur $[-1, 1]$ et vaut bien 0 en ± 1. Soient $x_0 \in]-1, 1[\setminus \{0\}$ et φ une fonction de $\mathcal{C}^2(]-1, 1[)$ telle que $U - \varphi$ admet un maximum ou un minimum local en x_0 alors $\varphi'(x_0) = U'(x_0) = \pm 1$ donc $|\varphi'(x_0)| = 1$. On a donc $|\varphi'(x_0)| - 1 = 0$ et donc U est sous et sur-solution en x_0.
Reste à traiter le cas $x_0 = 0$. On remarque déjà que

$$\{\varphi \in \mathcal{C}^1 \text{ au voisinage de 0 qui touche } U \text{ par dessous en } 0\} = \emptyset$$

et donc la condition de sur-solution est vérifiée en 0. En effet, s'il existait $\varphi \in \mathcal{C}^1$ au voisinage de 0 qui touche U par dessous en 0, on aurait pour $x \geq 0$ au voisinage de 0, $\varphi(x) = 1 + \varphi'(0)x + o(x) \leq 1 - x$ i.e. $(\varphi'(0) + 1)x + o(x) \leq 0$ pour x positif au voisinage de 0 et donc $\varphi'(0) \leq -1$. On aurait aussi pour $x \leq 0$ au voisinage de 0, $\varphi(x) = 1 + \varphi'(0)x + o(x) \leq 1 + x$ i.e. $(\varphi'(0) - 1)x + o(x) \leq 0$ pour $x \leq 0$ au voisinage de 0 et donc $\varphi'(0) \geq 1$, ce qui est absurde.

Si $\varphi \in \mathcal{C}^2$ touche U par dessus en 0, alors on a pour $x \geq 0$ au voisinage de 0, $\varphi(x) = 1+\varphi'(0)x+o(x) \geq 1-x$ i.e. $(\varphi'(0)+1)x+o(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$ au voisinage de 0 et donc $\varphi'(0) \geq -1$. On a aussi pour $x \leq 0$ au voisinage de 0, $\varphi(x) = 1+\varphi'(0)x+o(x) \geq 1+x$ i.e. $(\varphi'(0)-1)x+o(x) \geq 0$ pour $x \leq 0$ au voisinage de 0 et donc $\varphi'(0) \leq 1$. Finalement, on a prouvé que $|\varphi'(0)|-1 \leq 0$ et donc la condition de sous-solution est vérifiée.
On conclut donc que U est l'unique solution de viscosité continue de

$$\begin{cases} |u'|-1=0 \quad \text{sur} \quad]-1,1[\\ u(1)=u(-1)=0. \end{cases}$$

Exercice 2 : unicité dans l'espace entier

On va commencer par montrer un principe de comparaison :

Lemme. *Si u est une sous-solution de viscosité continue bornée de $\partial_t u + H(x,\nabla_x u) = 0$ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ et v une sur-solution de viscosité continue bornée de $\partial_t u + H(x,\nabla_x u) = 0$ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ telles que $u(0,x) \leq v(0,x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, alors $u \leq v$ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$.*

Démonstration. Soient u une sous-solution de viscosité continue bornée de $\partial_t u + H(x,\nabla_x u) = 0$ sur $\mathbb{R}^+_* \times \mathbb{R}^n$ et v une sur-solution de viscosité continue bornée de $\partial_t u + H(x,\nabla_x u) = 0$ sur $\mathbb{R}^+_* \times \mathbb{R}^n$. Soient $T > 0$ et $\sigma > 0$. On prend $\alpha > 0$ tel que

$$(1) \qquad 2C_H\sqrt{\|u\|_\infty + \|v\|_\infty}\sqrt{\alpha} \leq \frac{\sigma}{2T^2} \quad \text{i.e.} \quad \alpha \leq \frac{\sigma^2}{4T^2}\frac{1}{4C_H^2(\|u\|_\infty + \|v\|_\infty)} = \alpha_*.$$

Comme suggéré dans l'énoncé, on pose

$$M = \sup_{[0,T[\times\mathbb{R}^n} \left(u - v - \frac{\sigma}{T-t} - \alpha|x|^2 \right).$$

On remarque que M est un maximum car la fonction $(u - v - \sigma/(T-t) - \alpha|x|^2/2)$ tend vers $-\infty$ lorsque $t \to T^-$ ou $|x| \to +\infty$ puisque u et v sont bornées. Montrons que $M \leq 0$, on suppose par l'absurde que $M > 0$. On utilise la méthode de dédoublement des variables et pour $\varepsilon \in]0,1]$, on pose

$$M_\varepsilon = \sup_{\substack{(t,x)\in[0,T[\times\mathbb{R}^n \\ (s,y)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n}} \left(u(t,x) - v(s,y) - \frac{(t-s)^2}{2\varepsilon} - \frac{|x-y|^2}{2\varepsilon} - \frac{\sigma}{T-t} - \alpha|x|^2 \right).$$

Ce supremum est atteint, en effet, en prenant $\eta = 1/(1+\alpha\varepsilon)$ et en utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et Young, on a pour tout $\varepsilon \in]0,1]$:

$$\begin{aligned} -\frac{|x-y|^2}{2\varepsilon} - \alpha|x|^2 &\leq -|x|^2\left(\frac{1}{2\varepsilon}+\alpha\right) - \frac{|y|^2}{2\varepsilon} + \frac{x\cdot y}{\varepsilon} \\ &\leq -|x|^2\left(\frac{1}{2\varepsilon}+\alpha-\frac{1}{2\eta\varepsilon}\right) - |y|^2\frac{1-\eta}{2\varepsilon} \\ &= -\frac{\alpha}{2}|x|^2 - \frac{\alpha}{2(1+\alpha\varepsilon)}|y|^2 \leq -\frac{\alpha}{2}|x|^2 - \frac{\alpha}{2(1+\alpha)}|y|^2. \end{aligned}$$

Ainsi la fonction $((t,x),(s,y)) \mapsto u(t,x) - v(s,y) - (t-s)^2/(2\varepsilon) - |x-y|^2/(2\varepsilon) - \sigma/(T-t) - \alpha|x|^2$ tend vers $-\infty$ lorsque $|x|$ ou $|y|$ tend vers $+\infty$ et également lorsque $t \to T^-$. Donc comme les fonctions u et v sont continues, on peut conclure que M_ε est atteint et on a aussi que M_ε est atteint sur $([0,T_0] \times \overline{B}(0,R)) \times ([0,T] \times \overline{B}(0,R))$ avec $0 < T_0 < T$ et $R > 0$ indépendants de ε. On note $((t_\varepsilon, x_\varepsilon),(s_\varepsilon, y_\varepsilon))$ le point où ce sup est atteint.
On pose

$$\tilde{u}(t,x) = u(t,x) - \frac{\sigma}{T-t} - \alpha|x|^2$$

qui est continue sur $[0,T) \times \mathbb{R}^n$, et on a

$$M_\varepsilon = \sup_{\substack{(t,x)\in[0,T[\times\mathbb{R}^n \\ (s,y)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n}} \left(\tilde{u}(t,x) - v(s,y) - \frac{(t-s)^2}{2\varepsilon} - \frac{|x-y|^2}{2\varepsilon} \right).$$

On remarque $(M_\varepsilon)_\varepsilon$ est croissante en ε et $M_\varepsilon \geq M$ car le sup en $((t,x),(s,y))$ est plus grand que le sup en $(t,x) = (s,y)$. Donc M_ε admet une limite lorsque ε décroit vers 0 que l'on note L et $L \geq M$. On a :

$$\begin{aligned} M_{2\varepsilon} &\geq \tilde{u}(t_\varepsilon, x_\varepsilon) - v(s_\varepsilon, y_\varepsilon) - \frac{(t_\varepsilon - s_\varepsilon)^2}{4\varepsilon} - \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{4\varepsilon} \\ &= M_\varepsilon + \frac{(t_\varepsilon - s_\varepsilon)^2}{4\varepsilon} + \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{4\varepsilon}. \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{(t_\varepsilon - s_\varepsilon)^2}{4\varepsilon} + \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{4\varepsilon} \leq M_{2\varepsilon} - M_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0. \tag{2}$$

De plus, $(t_\varepsilon, x_\varepsilon)$ et $(s_\varepsilon, y_\varepsilon)$ sont des suites des compacts $[0,T_0] \times \overline{B}(0,R)$ et $[0,T] \times \overline{B}(0,R)$, donc quitte à extraire, on peut supposer qu'elles convergent, on note (t_0, x_0) et (s_0, y_0) leurs limites respectives. L'inégalité précédente montre que $(t_0, x_0) = (s_0, y_0) \in [0,T_0] \times \overline{B}(0,R)$.
Puisque $\tilde{u}$ et v sont continues, on a alors

$$\begin{aligned} M \leq L = \lim_{\varepsilon\to 0} M_\varepsilon &= \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\tilde{u}(t_\varepsilon, x_\varepsilon) - v(s_\varepsilon, y_\varepsilon) - \frac{(t_\varepsilon - s_\varepsilon)^2}{2\varepsilon} - \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{2\varepsilon} \right) \\ &= \tilde{u}(t_0, x_0) - v(t_0, x_0) \leq M. \end{aligned}$$

Donc $L = M$ et (t_0, x_0) est un point qui réalise M. Comme on a supposé que $u(0,x) \leq v(0,x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, et qu'on a supposé que

$$M = \tilde{u}(t_0, x_0) - v(t_0, x_0) = u(t_0, x_0) - \frac{\sigma}{T - t_0} - v(t_0, x_0) - \alpha|x_0|^2 > 0$$

en particulier, on a $u(t_0, x_0) - v(t_0, x_0) > 0$ et donc $t_0 > 0$. On avait déjà vu que $t_0 < T$ donc $t_0 \in]0, T[$ et donc pour ε assez petit, on aura $t_\varepsilon \in]0, T[$.
On considère ε assez petit pour que $t_\varepsilon \in]0, T[$. On utilise maintenant que u est sous-solution en $(t_\varepsilon, x_\varepsilon)$ et on pose

$$\varphi(t,x) = v(s_\varepsilon, y_\varepsilon) + \frac{(t - s_\varepsilon)^2}{2\varepsilon} + \frac{|x - y_\varepsilon|^2}{2\varepsilon} + \alpha|x|^2 + \frac{\sigma}{T-t}.$$

La fonction $u-\varphi$ admet un maximum local en $(t_\varepsilon, x_\varepsilon) \in]0,T[\times\mathbb{R}^n$ car

$$u-\varphi \leq u(t_\varepsilon, x_\varepsilon) - \varphi(t_\varepsilon, x_\varepsilon) = M_\varepsilon.$$

Donc on a l'inégalité de viscosité suivante :

$$\partial_t \varphi(t_\varepsilon, x_\varepsilon) + H(x_\varepsilon, \nabla_x \varphi(t_\varepsilon, x_\varepsilon)) \leq 0$$

i.e.

$$\frac{t_\varepsilon - s_\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{\sigma}{(T-t_\varepsilon)^2} + H\left(x_\varepsilon, \frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon} + 2\alpha x_\varepsilon\right) \leq 0.$$

De même, en prenant ψ définie par

$$\psi(s,y) = \tilde{u}(t_\varepsilon, x_\varepsilon) - \frac{(t_\varepsilon - s)^2}{2\varepsilon} - \frac{|x_\varepsilon - y|^2}{2\varepsilon}$$

comme fonction test et en utilisant que v est sur-solution, on obtient

$$\frac{t_\varepsilon - s_\varepsilon}{\varepsilon} + H\left(y_\varepsilon, \frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon}\right) \geq 0.$$

En combinant ces deux inégalités, on obtient

$$(3) \qquad \frac{\sigma}{T^2} \leq \frac{\sigma}{(T-t_\varepsilon)^2} \leq H\left(y_\varepsilon, \frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon}\right) - H\left(x_\varepsilon, \frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon} + 2\alpha x_\varepsilon\right).$$

On utilise maintenant les hypothèses faites sur H pour majorer cette différence :

$$\begin{aligned} & H\left(y_\varepsilon, \frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon}\right) - H\left(x_\varepsilon, \frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon} + 2\alpha x_\varepsilon\right) \\ & \quad \leq H\left(y_\varepsilon, \frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon}\right) - H\left(y_\varepsilon, \frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon} + 2\alpha x_\varepsilon\right) \\ & \qquad + H\left(y_\varepsilon, \frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon} + 2\alpha x_\varepsilon\right) - H\left(x_\varepsilon, \frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon} + 2\alpha x_\varepsilon\right) \\ & \quad \leq 2C_H \alpha |x_\varepsilon| + C_H \left(1 + \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|}{\varepsilon} + 2\alpha|x_\varepsilon|\right)|x_\varepsilon - y_\varepsilon|. \end{aligned}$$

Donc

$$(4) \qquad \begin{aligned} & H\left(y_\varepsilon, \frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon}\right) - H\left(x_\varepsilon, \frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon} + 2\alpha x_\varepsilon\right) \\ & \quad \leq 2C_H \alpha |x_\varepsilon| + C_H \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{\varepsilon} + (C_H + \alpha|x_\varepsilon|)|x_\varepsilon - y_\varepsilon|. \end{aligned}$$

Dans le membre de droite, lorsque $\varepsilon \to 0$, le deuxième terme tend vers 0 (d'après (2)) et le troisième terme aussi puisque $(x_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(y_\varepsilon)_\varepsilon$ ont la même limite. Il reste à analyser le premier terme. On a :

$$0 < M \leq M_\varepsilon \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty - \alpha|x_\varepsilon|^2$$

donc

$$\alpha|x_\varepsilon|^2 \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty = C_{u,v}.$$

En particulier, on a

$$\alpha|x_\varepsilon| = \sqrt{\alpha}(\sqrt{\alpha}|x_\varepsilon|) \leq \sqrt{C_{u,v}}\sqrt{\alpha}.$$

En faisant tendre ε vers 0 dans (3) et en utilisant (4), on aboutit à

$$\frac{\sigma}{T^2} \leq 2C_H\sqrt{C_{u,v}}\sqrt{\alpha} = \frac{\sigma}{2T^2}$$

d'après (1). Ceci nous donne une contradiction donc $M \leq 0$.
Soient $T > 0$ et $(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}$. On a montré que pour tout $\alpha \in]0, \alpha_*]$ et tout $\sigma > 0$,

$$u(t, x) - v(t, x) \leq \frac{\sigma}{T - t} + \alpha|x|^2.$$

En faisant tendre σ et α vers 0, on obtient $u(t, x) - v(t, x) \leq 0$. Donc

$$u(t, x) - v(t, x) \leq 0, \quad \forall\, (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n.$$

Ceci étant vrai pour tout $T > 0$, on peut conclure :

$$u(t, x) - v(t, x) \leq 0, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_*^+,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

De plus, cette inégalité est vraie en $t = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ grâce à la condition initiale, ce qui achève la démonstration. □

Prouvons maintenant notre résultat d'unicité grâce au principe de comparaison que nous venons de montrer. Si u et v sont deux solutions de viscosité continues bornées de

$$\begin{cases} \partial_t u + H(x, \nabla_x u) = 0 & \text{sur} \quad \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^n \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{sur} \quad \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

alors, en particulier, u est une sous-solution de viscosité continue bornée et v une sur-solution de viscosité continue bornée de $\partial_t u + H(x, \nabla_x u) = 0$ sur $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^n$. De plus, elles vérifient $u(0, x) = u_0(x) = v(0, x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. On peut donc appliquer le principe de comparaison, qui nous dit que $u \leq v$ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$. Par symétrie du problème, on peut aussi montrer que $u \geq v$ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$. Ainsi, on a montré que $u = v$ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$.

Exercice 3 : schéma numérique

1. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R})$. On a

$$\frac{\varphi(t, x + \Delta x) - \varphi(t, x)}{\Delta x} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} \partial_x \varphi(t, x) \quad \text{et} \quad \frac{\varphi(t, x) - \varphi(t, x - \Delta x)}{\Delta x} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} \partial_x \varphi(t, x).$$

Donc

$$\max\left(\left(\frac{\varphi(t, x + \Delta x) - \varphi(t, x)}{\Delta x} \right)_+, \left(\frac{\varphi(t, x) - \varphi(t, x - \Delta x)}{\Delta x} \right)_- \right)$$
$$\xrightarrow[\Delta x \to 0]{} \max\big((\partial_x \varphi(t, x))_+, (\partial_x \varphi(t, x))_- \big) = |\partial_x \varphi(t, x)|.$$

On en déduit

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(t+\Delta t, x) - S^h(t, x, \varphi(t,x), \varphi(t, x+\Delta x), \varphi(t, x-\Delta x))}{\Delta t}$$
$$= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\varphi(t+\Delta t, x) - \varphi(t,x) - (\Delta t)\, c(x)\, |\partial_x \varphi(t,x)|}{\Delta t} = \partial_t \varphi(t,x) - c(x)|\partial_x \varphi(t,x)|.$$

2. On a

$$S^h(t,x,\alpha,\beta,\gamma) = \alpha + (\Delta t)\, c(x) \max\left(\left(\frac{\beta-\alpha}{\Delta x}\right)_+, \left(\frac{\alpha-\gamma}{\Delta x}\right)_-\right).$$

On commence par remarquer que S^h est clairement une fonction croissante en β et en γ. On étudie ensuite la monotonie en α. On pose

$$\varphi_{\beta,\gamma}(\alpha) = \max\big((\beta-\alpha)_+, (\alpha-\gamma)_-\big)$$

de sorte que

$$S^h(t,x,\alpha,\beta,\gamma) = \alpha + \frac{\Delta t}{\Delta x}\, c(x)\, \varphi_{\beta,\gamma}(\alpha).$$

On a $-1 \leq \partial_\alpha \varphi_{\beta,\gamma}(\alpha) \leq 0$ pour presque tout α donc si $\frac{\Delta t}{\Delta x}\, c(x) \leq 1$ pour tout $(t,x) \in \mathcal{G}^h$, alors pour presque tout α,

$$\partial_\alpha S^h(t,x,\alpha,\beta,\gamma) \geq 1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}\, c(x) \geq 0.$$

De plus, S^h est continue en α donc S^h est aussi croissante en α. On peut donc imposer comme condition que $c_0\,(\Delta t) \leq \Delta x$ car alors, on aura pour tout $(t,x) \in \mathcal{G}^h$, $\frac{\Delta t}{\Delta x}\, c(x) \leq \frac{1}{c_0} c_0 = 1$.

3. On a pour tout $x \in \{i\Delta x,\, i \in \mathbb{Z}\}$:

$$u_1^h(\Delta t, x) \leq S^h(0, x, u_1^h(0,x), u_1^h(0, x+\Delta x), u_1^h(0, x-\Delta x)).$$

En utilisant l'hypothèse $u_1^h(0,x) \leq u_2^h(0,x)$ pour tout $x \in \{i\Delta x,\, i \in \mathbb{Z}\}$ et le fait que S^h est croissante en ses trois dernières variables, on en déduit

$$u_1^h(\Delta t, x) \leq S^h(0, x, u_2^h(0,x), u_2^h(0, x+\Delta x), u_2^h(0, x-\Delta x)) \leq u_2^h(\Delta t, x).$$

Plus généralement, pour tout $(t,x) \in \mathcal{G}^h$, si $u_1^h(t,x) \leq u_2^h(t,x)$, on peut montrer que $u_1^h(t+\Delta t, x) \leq u_2^h(t+\Delta t, x)$ avec les mêmes arguments. On conclut par récurrence que $u_1^h \leq u_2^h$ sur $\mathcal{G}^h$.

4. Soient $C \geq c_0 L_0$ et $h \in H$. On pose $u_-^h(t,x) = u_0(x) - Ct$ et $u_+^h(t,x) = u_0(x) + Ct$ pour $(t,x) \in \mathcal{G}^h$. Montrons que u_-^h est une sous-solution discrète :

$$\frac{u_-^h(t+\Delta t, x) - u_-^h(t,x)}{\Delta t} = -C$$
$$\leq c(x) \max\left(\left(\frac{u_-^h(t, x+\Delta x) - u_-^h(t,x)}{\Delta x}\right)_+, \left(\frac{u_-^h(t,x) - u_-^h(t, x-\Delta x)}{\Delta x}\right)_-\right)$$

car $C \geq 0$ et la quantité à droite de l'inégalité est positive. De plus, u_+^h est une sur-solution discrète. En effet, on a :

$$\begin{aligned}\frac{u_+^h(t+\Delta t, x) - u_+^h(t,x)}{\Delta t} &= C \geq c_0 L_0 \\ &\geq c(x) \max\left(\left(\frac{u_+^h(t,x+\Delta x) - u_+^h(t,x)}{\Delta x}\right)_+, \left(\frac{u_+^h(t,x) - u_+^h(t,x-\Delta x)}{\Delta x}\right)_-\right)\end{aligned}$$

car

$$\frac{u_+^h(t,x+\Delta x) - u_+^h(t,x)}{\Delta x} = \frac{u_0(x+\Delta x) - u_0(x)}{\Delta x}$$

et

$$\frac{u_+^h(t,x) - u_+^h(t,x-\Delta x)}{\Delta x} = \frac{u_0(x) - u_0(x-\Delta x)}{\Delta x}$$

donc

$$c(x) \max\left(\left(\frac{u_+^h(t,x+\Delta x) - u_+^h(t,x)}{\Delta x}\right)_+, \left(\frac{u_+^h(t,x) - u_+^h(t,x-\Delta x)}{\Delta x}\right)_-\right) \leq c_0 L_0, \quad \forall\,(t,x) \in \mathcal{G}^h.$$

Ainsi, comme u^h est à la fois sur et sous-solution discrète, par le principe de comparaison discret, on a

$$u_-^h \leq u^h \leq u_+^h$$

et donc $|u^h(t,x) - u_0(x)| \leq Ct$ pour tout $(t,x) \in \mathcal{G}^h$.

5. a) On a :

$$\overline{u}(t,x) = \overline{\lim_{\substack{(s,y)\to(t,x)\\ (s,y)\in\mathcal{G}^h \\ H\ni h\to 0}}}\, u^h(s,y) \quad \text{et} \quad \underline{u}(t,x) = \underline{\lim_{\substack{(s,y)\to(t,x)\\ (s,y)\in\mathcal{G}^h \\ H\ni h\to 0}}}\, u^h(s,y).$$

Montrons que $\overline{u}$ et $\underline{u}$ sont finies. On a montré à la question 4. qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$-Cs \leq u^h(s,y) - u_0(y) \leq Cs, \quad \forall\, h \in H,\ \forall\,(s,y) \in \mathcal{G}^h.$$

En passant aux semi-limites relaxées, on obtient

$$-Ct \leq \overline{u}(t,x) - u_0(x) \leq Ct \quad \text{et} \quad -Ct \leq \underline{u}(t,x) - u_0(x) \leq Ct, \quad \forall\,(t,x) \in \mathcal{G}^h.$$

De plus, ces inégalités nous donnent également $\overline{u}(0,x) = u_0(x) = \underline{u}(0,x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Montrons maintenant que $\overline{u}$ est une sous-solution de $\partial_t u - c(x)\,|\partial_x u| = 0$. Soit $(t_0,x_0) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}$ et soit $\varphi \in \mathcal{C}^1$ touchant $\overline{u}$ par dessus en (t_0,x_0) strictement c'est-à-dire qu'il existe $r > 0$ tel que $\overline{u} < \varphi$ sur $B_r(t_0,x_0) \setminus \{(t_0,x_0)\}$ et $\overline{u}(t_0,x_0) = \varphi(t_0,x_0)$. On a alors

$$\varphi(t_0,x_0) = \overline{u}(t_0,x_0) = \overline{\lim_{\substack{(s,y)\to(t_0,x_0)\\ (s,y)\in\mathcal{G}^h \\ H\ni h\to 0}}}\, u^h(s,y) = \lim_{n\to\infty} u^{h_n}(s_n,y_n).$$

Posons $u^n = u^{h_n}$ et considérons

$$(t_n,x_n) \in \arg\max\left\{(u^n - \varphi)(t,x),\ (t,x) \in B_r(t_0,x_0) \cap \mathcal{G}^{h_n}\right\}$$

i.e.

$$(u^n - \varphi)(t_n, x_n) = \max_{B_r(t_0,x_0)\cap\mathcal{G}^{h_n}} (u^n - \varphi).$$

Montrons que

(i) $(t_n, x_n) \to (t_0, x_0)$,

(ii) $u^n(t_n, x_n) \to \overline{u}(t_0, x_0)$.

Preuve de (i). La suite (t_n, x_n) est contenue dans $B_r(t_0, x_0)$ donc admet au moins un point d'accumulation. Considérons $(t_1, x_1) \in \overline{B}_r(t_0, x_0)$ un point d'accumulation de (t_n, x_n). Puisque $(s_n, y_n) \to (t_0, x_0)$, pour n assez grand, $(s_n, y_n) \in B_r(t_0, x_0)$ et donc par définition de (t_n, x_n),

$$u^n(t_n, x_n) - \varphi(t_n, x_n) \geq u^n(s_n, y_n) - \varphi(s_n, y_n). \tag{5}$$

Quitte à extraire une sous-suite, en faisant tendre n vers $+\infty$, ceci implique

$$\overline{u}(t_1, x_1) - \varphi(t_1, x_1) \geq \overline{u}(t_0, x_0) - \varphi(t_0, x_0) = 0.$$

Donc $\overline{u}(t_1, x_1) \geq \varphi(t_1, x_1)$ et comme φ touche $\overline{u}$ par dessus en (t_0, x_0) strictement, on en déduit $(t_1, x_1) = (t_0, x_0)$. Le point (i) est ainsi prouvé.

Preuve de (ii). Par définition de $\overline{u}$,

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, u^n(t_n, x_n) \leq \overline{u}(t_0, x_0).$$

De plus, en utilisant (5), comme $\varphi(t_n, x_n) \to \varphi(t_0, x_0)$ et $\varphi(s_n, y_n) \to \varphi(t_0, x_0)$, on obtient

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}}\, u^n(t_n, x_n) \geq \underline{\lim_{n\to+\infty}}\, u^n(s_n, y_n) = \lim_{n\to+\infty} u^n(s_n, y_n) = \overline{u}(t_0, x_0).$$

En combinant les deux dernières inégalités, on obtient (ii).

On veut maintenant prouver une inégalité de viscosité discrète pour u^n qui fait intervenir φ grâce à la monotonie du schéma. On note $\delta_n = u^n(t_n, x_n) - \varphi(t_n, x_n)$. Par définition de (t_n, x_n), on a :

$$u^n - \varphi \leq u^n(t_n, x_n) - \varphi(t_n, x_n) = \delta_n.$$

Par monotonie du schéma, ceci implique :

$$\begin{aligned}
u^n(t_n, x_n) &= u^{h_n}(t_n, x_n) \\
&= S^{h_n}(t_n - \Delta t, x_n, u^n(t_n - \Delta t, x_n), u^n(t_n - \Delta t, x_n + \Delta x), u^n(t_n - \Delta t, x_n - \Delta x)) \\
&\leq S^{h_n}(t_n - \Delta t, x_n, \varphi(t_n - \Delta t, x_n) + \delta_n, \varphi(t_n - \Delta t, x_n + \Delta x) + \delta_n, \varphi(t_n - \Delta t, x_n - \Delta x) + \delta_n) \\
&\leq \varphi(t_n - \Delta t, x_n) + \delta_n \\
&\quad + (\Delta t)\, c(x_n) \max\Bigg(\left(\frac{\varphi(t_n - \Delta t, x_n + \Delta x) + \delta_n - (\varphi(t_n - \Delta t, x_n) + \delta_n)}{\Delta x} \right)_+, \\
&\qquad\qquad \left(\frac{\varphi(t_n - \Delta t, x_n) + \delta_n - (\varphi(t_n - \Delta t, x_n - \Delta x) + \delta_n)}{\Delta x} \right)_- \Bigg).
\end{aligned}$$

Donc, comme $u^n(t_n,x_n)=\varphi(t_n,x_n)+\delta_n$, on obtient :

$$\begin{aligned}\varphi(t_n,x_n)&\le \varphi(t_n-\Delta t,x_n)\\&\quad+(\Delta t)\,c(x_n)\max\Bigg(\left(\frac{\varphi(t_n-\Delta t,x_n+\Delta x)-\varphi(t_n-\Delta t,x_n)}{\Delta x}\right)_+,\\&\qquad\qquad\left(\frac{\varphi(t_n-\Delta t,x_n)-\varphi(t_n-\Delta t,x_n-\Delta x)}{\Delta x}\right)_-\Bigg)\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(t_n,x_n)-\varphi(t_n-\Delta t,x_n)}{\Delta t}&\le c(x_n)\max\Bigg(\left(\frac{\varphi(t_n-\Delta t,x_n+\Delta x)-\varphi(t_n-\Delta t,x_n)}{\Delta x}\right)_+,\\&\qquad\left(\frac{\varphi(t_n-\Delta t,x_n)-\varphi(t_n-\Delta t,x_n-\Delta x)}{\Delta x}\right)_-\Bigg).\end{aligned}$$

En passant à la limite $(\Delta t,\Delta x)\to 0$, on en déduit :

$$\partial_t\varphi(t_n,x_n)-c(x_n)|\partial_x\varphi(t_n,x_n)|\le 0.$$

Puis en faisant tendre n vers $+\infty$,

$$\partial_t\varphi(t_0,x_0)-c(x_0)|\partial_x\varphi(t_0,x_0)|\le 0$$

ce qui implique que $\overline{u}$ est une sous-solution de $\partial_t u-c(x)\,|\partial_x u|=0$.
On peut montrer de la même manière que $\underline{u}$ est une sur-solution de $\partial_t u-c(x)\,|\partial_x u|=0$.
c) D'après le cours, (2) admet une unique solution de viscosité (qui est périodique et continue), on la note u. On a $\overline{u}(0,x)=u_0(x)=\underline{u}(0,x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ et $\overline{u}$ (resp. $\underline{u}$) est une sous-solution (resp. sur-solution) de $\partial_t u-c(x)\,|\partial_x u|=0$. Donc, par principe de comparaison, on obtient $\overline{u}=\underline{u}=u$.
De la même manière que dans le cours, on peut montrer que u^h converge localement uniformément vers u lorsque $h\to 0$, $h\in H$ si et seulement si $\overline{u}(t,x)=\underline{u}(t,x)$ pour tout $(t,x)\in\mathbb{R}_*^+\times\mathbb{R}$, ce qu'on vient de prouver. On peut donc conclure à la convergence locale uniforme de u^h vers u lorsque $h\to 0$, $h\in H$.

6. a) Quitte à changer la valeur de C, on peut supposer qu'on a :

(6) $\quad |u(s,y)-u_0(y)|\le Cs,\quad \forall\,(s,y)\in[0,T)\times\mathbb{R}\quad$ et $\quad |u^h(t,x)-u_0(x)|\le Ct,\quad \forall\,(t,x)\in\mathcal{G}_T^h.$

Ainsi,

$$u^h(t,x)-u(s,y)\le u_0(x)-u_0(y)+C(t+s)\le L_0|x-y|+2CT.$$

Donc

$$M_\sigma\le \sup_{\substack{(t,x)\in\mathcal{G}_T^h\\(s,y)\in[0,T)\times\mathbb{R}}}\left(L_0|x-y|-\frac{|x-y|^2}{2\varepsilon}\right)+2CT\le\sup_{r>0}\left(L_0r-\frac{r^2}{2\varepsilon}\right)+2CT<+\infty.$$

Ce supremum est bien atteint, en effet, en prenant $\eta = 1/(1+\alpha\varepsilon)$ et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour tout $\varepsilon \in]0,1]$:

$$
\begin{aligned}
-\frac{(x-y)^2}{2\varepsilon} - \alpha y^2 &\leq -y^2\left(\frac{1}{2\varepsilon}+\alpha\right) - \frac{x^2}{2\varepsilon} + \frac{xy}{\varepsilon} \\
&\leq -y^2\left(\frac{1}{2\varepsilon}+\alpha-\frac{1}{2\eta\varepsilon}\right) - x^2\frac{1-\eta}{2\varepsilon} \\
&= -\frac{\alpha}{2}y^2 - \frac{\alpha}{2(1+\alpha\varepsilon)}x^2 \leq -\frac{\alpha}{2}y^2 - \frac{\alpha}{2(1+\alpha)}x^2.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Ainsi la fonction $((t,x),(s,y)) \mapsto u^h(t,x) - u(s,y) - \sigma/(T-t) - (t-s)^2/(2\nu) - (x-y)^2/(2\varepsilon) - \alpha y^2$ tend vers $-\infty$ lorsque $|x|$ ou $|y|$ tend vers $+\infty$ et également lorsque $t \to T^-$. Donc le sup de cette fonction sur $\mathcal{G}_T^h \times ([0,T) \times \mathbb{R})$ est égal au sup de cette fonction sur $\big(([0,T_0] \times \overline{B}(0,R)\big) \cap \mathcal{G}_T^h) \times ([0,T] \times \mathbb{R})$ avec $0 < T_0 < T$ et $R > 0$ indépendants de ε (d'après l'estimation (7)). De plus, comme la fonction u est continue et que la fonction u^h ne prend qu'un nombre fini de valeurs sur $\mathcal{G}_T^h \cap ([0,T_0] \times \overline{B}(0,R))$, on en déduit que ce sup est atteint sur $\big(([0,T_0] \times \overline{B}(0,R)\big) \cap \mathcal{G}_T^h) \times ([0,T] \times \mathbb{R})$. On note $(t^h, x^h, \bar{s}, \bar{y})$ le point où ce supremum est atteint.

b) Supposons que $M_\sigma \geq 0$ pour tout $\sigma \geq 0$ et aussi que $t^h > 0$ et $\bar{s} > 0$.

On a

$$
\begin{aligned}
u^h(t,x) - u^h(t^h,x^h) &\leq u(\bar{s},\bar{y}) + \frac{\sigma}{T-t} + \frac{(t-\bar{s})^2}{2\nu} + \frac{(x-\bar{y})^2}{2\varepsilon} + \alpha\bar{y}^2 \\
&\quad - u(\bar{s},\bar{y}) - \frac{\sigma}{T-t^h} - \frac{(t^h-\bar{s})^2}{2\nu} - \frac{(x^h-\bar{y})^2}{2\varepsilon} - \alpha\bar{y}^2 \\
&\leq \frac{\sigma}{T-t} + \frac{(t-\bar{s})^2}{2\nu} + \frac{(x-\bar{y})^2}{2\varepsilon} - \frac{\sigma}{T-t^h} - \frac{(t^h-\bar{s})^2}{2\nu} - \frac{(x^h-\bar{y})^2}{2\varepsilon}.
\end{aligned}
$$

On pose

$$
\varphi(t,x) = \frac{\sigma}{T-t} + \frac{(t-\bar{s})^2}{2\nu} + \frac{(x-\bar{y})^2}{2\varepsilon} - \frac{\sigma}{T-t^h} - \frac{(t^h-\bar{s})^2}{2\nu} - \frac{(x^h-\bar{y})^2}{2\varepsilon}
$$

de sorte que $u^h \leq \varphi + u^h(t^h,x^h)$. Donc, par monotonie du schéma :

$$
\begin{aligned}
u^h(t^h,x^h) &= S^h(t^h-\Delta t, x^h, u^h(t^h-\Delta t,x^h), u^h(t^h-\Delta t, x^h+\Delta x), u^h(t^h-\Delta t, x^h-\Delta x)) \\
&\leq S^h(t^h-\Delta t, x^h, \varphi(t^h-\Delta t,x^h)+u^h(t^h,x^h), \varphi(t^h-\Delta t,x^h+\Delta x)+u^h(t^h,x^h), \\
&\qquad\qquad \varphi(t^h-\Delta t,x^h-\Delta x)+u^h(t^h,x^h)) \\
&\leq \varphi(t^h-\Delta t,x^h) + u^h(t^h,x^h) \\
&\quad + c_0\,(\Delta t)\max\left(\left(\frac{\varphi(t^h-\Delta t,x^h+\Delta x)-\varphi(t^h-\Delta t,x^h)}{\Delta x}\right)_+,\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left(\frac{\varphi(t^h-\Delta t,x^h)-\varphi(t^h-\Delta t,x^h-\Delta x)}{\Delta x}\right)_-\right).
\end{aligned}
$$

De plus $\varphi(t^h, x^h) = 0$ donc on obtient ainsi l'inégalité de viscosité suivante :

$$\frac{\varphi(t^h, x^h) - \varphi(t^h - \Delta t, x^h)}{\Delta t} \leq c_0 \max \Bigg(\left(\frac{\varphi(t^h - \Delta t, x^h + \Delta x) - \varphi(t^h - \Delta t, x^h)}{\Delta x} \right)_+ , \left(\frac{\varphi(t^h - \Delta t, x^h) - \varphi(t^h - \Delta t, x^h - \Delta x)}{\Delta x} \right)_- \Bigg).$$

Calculons maintenant les dérivées discrètes de la fonction test φ. On a :

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(t^h, x^h) - \varphi(t^h - \Delta t, x^h)}{\Delta t} &= \frac{1}{\Delta t} \left(-\frac{\sigma}{T - t^h + \Delta t} - \frac{(t^h - \Delta t - \bar{s})^2}{2\nu} + \frac{\sigma}{T - t^h} + \frac{(t^h - \bar{s})^2}{2\nu} \right) \\ &= \frac{\sigma}{(T - t^h)(T - t^h + \Delta t)} + \frac{t^h - \bar{s}}{\nu} - \frac{\Delta t}{2\nu} \\ &\geq \frac{\sigma}{T^2} + \frac{t^h - \bar{s}}{\nu} - \frac{\Delta t}{2\nu} \end{aligned}$$

car $t^h > 0$ et $t^h \in \mathcal{G}^h$ donc $t^h \geq \Delta t$. On a aussi :

$$\frac{\varphi(t^h - \Delta t, x^h + \Delta x) - \varphi(t^h - \Delta t, x^h)}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{2\varepsilon} + \frac{x^h - \bar{y}}{\varepsilon}$$

et

$$\frac{\varphi(t^h - \Delta t, x^h) - \varphi(t^h - \Delta t, x^h - \Delta x)}{\Delta x} = -\frac{\Delta x}{2\varepsilon} + \frac{x^h - \bar{y}}{\varepsilon}.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} &\frac{\sigma}{T^2} + \frac{t^h - \bar{s}}{\nu} - \frac{\Delta t}{2\nu} \\ &\quad \leq c_0 \max \left(\left(\frac{\Delta x}{2\varepsilon} + \frac{x^h - \bar{y}}{\varepsilon} \right)_+ , \left(-\frac{\Delta x}{2\varepsilon} + \frac{x^h - \bar{y}}{\varepsilon} \right)_- \right) \\ &\quad \leq c_0 \left(\frac{\Delta x}{2\varepsilon} + \left| \frac{x^h - \bar{y}}{\varepsilon} \right| \right) \end{aligned}$$

Finalement, on a obtenu

$$\frac{\sigma}{T^2} + \frac{t^h - \bar{s}}{\nu} - c_0 \left| \frac{x^h - \bar{y}}{\varepsilon} \right| \leq \frac{\Delta t}{2\nu} + c_0 \frac{\Delta x}{2\varepsilon}. \tag{8}$$

On va maintenant écrire une inégalité de viscosité continue. On pose

$$\psi(s, y) = u(\bar{s}, \bar{y}) - \frac{(t^h - s)^2}{2\nu} - \frac{(x^h - y)^2}{2\varepsilon} - \alpha y^2 + \frac{(t^h - \bar{s})^2}{2\nu} + \frac{(x^h - \bar{y})^2}{2\varepsilon} + \alpha \bar{y}^2$$

La fonction ψ ainsi définie touche u par dessous en $(\bar{s}, \bar{y})$. Donc en utilisant que u est une sur-solution en $(\bar{s}, \bar{y})$, on obtient :

$$\frac{t^h - \bar{s}}{\nu} - c_0 \left| \frac{x^h - \bar{y}}{\varepsilon} - 2\alpha \bar{y} \right| \geq 0. \tag{9}$$

En combinant (8) et (9), on aboutit à :

$$\frac{\sigma}{T^2} \leq \frac{\Delta t}{2\nu} + c_0 \frac{\Delta x}{2\varepsilon} + c_0 \left(2\alpha|\bar{y}|\right). \tag{10}$$

On doit maintenant estimer $\alpha|\bar{y}|$. En utilisant que $M_\sigma \geq 0$, on obtient

$$u^h(t^h, x^h) - u(\bar{s}, \bar{y}) - \frac{(x^h - \bar{y})^2}{2\varepsilon} - \alpha\bar{y}^2 \geq 0.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\alpha\bar{y}^2 &\leq u^h(t^h, x^h) - u(\bar{s}, \bar{y}) - \frac{(x^h - \bar{y})^2}{2\varepsilon} \\
&\leq u_0(x^h) - u_0(\bar{y}) + 2CT - \frac{(x^h - \bar{y})^2}{2\varepsilon} \\
&\leq L_0|x^h - \bar{y}| - \frac{(x^h - \bar{y})^2}{2\varepsilon} + 2CT \\
&\leq \sup_{r>0}\left(L_0 r - \frac{r^2}{2\varepsilon}\right) + 2CT.
\end{aligned}$$

où on a utilisé (6) pour la deuxième inégalité. Par une étude de fonction élémentaire, on obtient que pour tout $\delta > 0$, on a :

$$\sup_{r>0}\left(L_0 r - \frac{r^2}{2\delta}\right) = \frac{L_0^2\delta}{2} \tag{11}$$

et donc pour $\varepsilon \leq 1$,

$$\alpha\bar{y}^2 \leq \frac{L_0^2\varepsilon}{2} + 2CT \leq K$$

où K est une constante strictement positive qui ne dépend que de T. On en déduit

$$\alpha^2\bar{y}^2 \leq 2\alpha K$$

donc

$$\alpha|\bar{y}| \leq \sqrt{\alpha}\sqrt{2K} = \mathcal{O}(\sqrt{\alpha}).$$

On pose alors

$$\sigma_* = T^2\left(\frac{\Delta t}{2\nu} + c_0\frac{\Delta x}{2\varepsilon}\right).$$

Si $\sigma > \sigma_*$, l'inégalité (10) nous donne ainsi

$$0 < \frac{\sigma - \sigma_*}{T^2} \leq c_0\alpha|\bar{y}| = \mathcal{O}(\sqrt{\alpha}).$$

En faisant tendre α vers 0, on obtient une contradiction. Donc pour $\sigma > \sigma_*$, on a forcément $t^h = 0$ ou $\bar{s} = 0$.

c) Soit $\sigma > \sigma_*$. On sait, d'après la question précédente que $t^h = 0$ ou $\bar{s} = 0$.

Si $t^h = 0$, on a

$$
\begin{aligned}
M_\sigma &= u^h(0, x^h) - u(\bar{s}, \bar{y}) - \frac{\sigma}{T} - \frac{\bar{s}^2}{2\nu} - \frac{(x^h - \bar{y})^2}{2\varepsilon} - \alpha \bar{y}^2 \\
&\leq u_0(x^h) - u_0(\bar{y}) + C\bar{s} - \frac{\bar{s}^2}{2\nu} - \frac{(x^h - \bar{y})^2}{2\varepsilon}
\end{aligned}
$$

où on a utilisé (6) pour obtenir la dernière inégalité. Puisque u_0 est L_0-lipschitzienne, on en déduit

$$
M_\sigma \leq L_0|x^h - \bar{y}| - \frac{(x^h - \bar{y})^2}{2\varepsilon} + C\bar{s} - \frac{\bar{s}^2}{2\nu} \leq \frac{L_0^2}{2}\varepsilon + \frac{C^2}{2}\nu
$$

d'après la remarque (11).
De la même manière, si $\bar{s} = 0$, on a

$$
\begin{aligned}
M_\sigma &= u^h(t^h, x^h) - u(0, \bar{y}) - \frac{\sigma}{T - t^h} - \frac{(t^h)^2}{2\nu} - \frac{(x^h - \bar{y})^2}{2\varepsilon} - \alpha \bar{y}^2 \\
&\leq u_0(x^h) - u_0(\bar{y}) + Ct^h - \frac{(t^h)^2}{2\nu} - \frac{(x^h - \bar{y})^2}{2\varepsilon} \\
&\leq L_0|x^h - \bar{y}| - \frac{(x^h - \bar{y})^2}{2\varepsilon} + Ct^h - \frac{(t^h)^2}{2\nu} \leq \frac{L_0^2}{2}\varepsilon + \frac{C^2}{2}\nu.
\end{aligned}
$$

On a donc montré que si $\sigma > \sigma_*$,

$$
M_\sigma \leq \widetilde{C}(\varepsilon + \nu), \quad \widetilde{C} > 0.
$$

Ainsi pour tout $(t, x) \in \mathcal{G}^h \cap (]0, T/2[\times\mathbb{R})$ et pour tout $(s, y) \in]0, T/2[\times\mathbb{R}$, on a

$$
u^h(t, x) - u(s, y) - \frac{\sigma}{T - t} - \frac{(t - s)^2}{2\nu} - \frac{(x - y)^2}{2\varepsilon} - \alpha y^2 \leq \widetilde{C}(\varepsilon + \nu)
$$

donc en remarquant que $T - t \geq T/2$ pour $t \in]0, T/2[$, en faisant tendre α vers 0 et en prenant $(t, x) = (s, y)$, on obtient

$$
u^h(t, x) \leq u(t, x) + \frac{2\sigma}{T} + \widetilde{C}(\varepsilon + \nu), \quad \forall\, \sigma > \sigma_*.
$$

En faisant maintenant $\sigma \to \sigma_*^+$, on obtient

$$
u^h(t, x) \leq u(t, x) + \frac{2\sigma_*}{T} + \widetilde{C}(\varepsilon + \nu) = u(t, x) + 2T\left(\frac{\Delta t}{2\nu} + c_0\frac{\Delta x}{2\varepsilon}\right) + \widetilde{C}(\varepsilon + \nu).
$$

Quitte à changer la valeur de $\widetilde{C}$, on a donc

$$
u^h(t, x) - u(t, x) \leq \widetilde{C}\left(\frac{\Delta t}{\nu} + \frac{\Delta x}{\varepsilon} + \varepsilon + \nu\right).
$$

En prenant $\varepsilon = \nu = \sqrt{\Delta x}$ et $c_0\Delta t = \Delta x$, on obtient pour tout $(t, x) \in \mathcal{G}^h \cap (]0, T/2[\times\mathbb{R})$,

$$
u^h(t, x) - u(t, x) \leq \widetilde{C}\sqrt{\Delta x}
$$

quitte à changer de nouveau la valeur de la constante $\widetilde{C}$.
Par symétrie du problème, on peut montrer de la même manière qu'il existe $\widetilde{C}' > 0$ telle que

$$
u(t, x) - u^h(t, x) \leq \widetilde{C}'\sqrt{\Delta x}.
$$

pour tout $(t, x) \in \mathcal{G}^h \cap (]0, T/2[\times\mathbb{R})$. De plus, dans ce qui précède, T est quelconque, on peut donc conclure.