Corrigé n°6

Exercice 1 : régularité des solutions de viscosité

1. On fixe $\delta > 0$ et $\sigma > 0$ pour le reste de la preuve. On choisit ensuite $\varepsilon < \frac{\sigma}{2T^2}$. Puisque H est uniformément continu, on peut choisir $\beta > 0$ assez petit pour que pour p, $q \in \mathbb{R}^n$:

$$|p-q| \leq 4\sqrt{2\|u\|_\infty}\sqrt{\beta} \Rightarrow |H(t,x,p) - H(t,x,q)| \leq \varepsilon, \quad \forall\, (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Quitte à diminuer la valeur de β, on peut supposer également que $2L_1\sqrt{2}\sqrt{\|u\|_\infty}\sqrt{\beta} < \delta$.
Montrons maintenant que $M \leq 0$. On suppose que $M > 0$ et on veut aboutir à une contradiction. On dédouble les variables en temps en introduisant pour $\alpha > 0$:

$$M_\alpha = \sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R}^n \\ t,s\in[0,T]}} \left(u(t,x) - u(s,y) - C_\delta(t)|x-y| - \frac{(t-s)^2}{2\alpha} - \beta(|x|^2 + |y|^2) - \frac{\sigma}{T-t} \right).$$

La fonction

$$(t,s,x,y) \mapsto u(t,x) - u(s,y) - C_\delta(t)|x-y| - \frac{(t-s)^2}{2\alpha} - \beta(|x|^2+|y|^2) - \frac{\sigma}{T-t}$$

tend vers $-\infty$ lorsque $t \to T$, $|x| \to +\infty$ ou $|y| \to +\infty$. De plus, cette fonction est continue donc M_α est atteint sur $[0,T_0] \times [0,T] \times \bar{B}(0,R)^2$ pour un certain $0 < T_0 < T$ et un certain $R > 0$. On note $(t_\alpha, s_\alpha, x_\alpha, y_\alpha)$ un point où ce sup est atteint. On remarque que $M_\alpha \geq M$ (M est atteint pour les mêmes raisons) car le sup en (t,s,x,y) est supérieur au sup en (t,t,x,y). De plus, M_α est une fonction croissante de α donc lorsque α décroit vers 0, M_α converge vers $L \geq M$. De plus, on a :

$$\begin{aligned} M_{2\alpha} &\geq u(t_\alpha,x_\alpha) - u(s_\alpha,y_\alpha) - C_\delta(t_\alpha)|x_\alpha - y_\alpha| - \frac{(t_\alpha - s_\alpha)^2}{4\alpha} - \beta(|x_\alpha|^2 + |y_\alpha|^2) - \frac{\sigma}{T-t_\alpha} \\ &= M_\alpha + \frac{(t_\alpha - s_\alpha)^2}{4\alpha}. \end{aligned}$$

Comme $(M_\alpha)_\alpha$ est convergente, on en déduit que

$$\frac{(t_\alpha - s_\alpha)^2}{\alpha} \xrightarrow[\alpha\to 0]{} 0.$$

On a $(t_\alpha, s_\alpha, x_\alpha, y_\alpha) \in [0,T_0] \times [0,T] \times \bar{B}(0,R)^2$ donc quitte à extraire, on peut supposer que

$$(t_\alpha, s_\alpha, x_\alpha, y_\alpha) \xrightarrow[\alpha\to 0]{} (t_0, s_0, x_0, y_0).$$

De plus, par la remarque précédente, on a $t_0 = s_0$. On obtient ainsi

$$M \leq L = \lim_{\alpha\to 0} M_\alpha \leq u(t_0,x_0) - u(t_0,y_0) - C_\delta(t_0)|x_0 - y_0| - \beta(|x_0|^2 + |y_0|^2) - \frac{\sigma}{T-t_0} \leq M.$$

Donc (t_0, t_0, x_0, y_0) est un point qui réalise M. On remarque alors que $x_0 \neq y_0$ car sinon, on aurait

$$M = -\beta(|x_0|^2 + |y_0|^2) - \frac{\sigma}{T-t_0} \leq 0,$$

ce qui est absurde puisqu'on a supposé $M > 0$. On remarque aussi que $t_0 > 0$ car sinon on aurait

$$\begin{aligned} M &= u(0,x_0) - u(0,y_0) - C_\delta(0)|x_0 - y_0| - \beta(|x_0|^2 + |y_0|^2) - \frac{\sigma}{T - t_0} \\ &= u_0(x_0) - u_0(y_0) - \|\nabla u_0\|_\infty |x_0 - y_0| - \beta(|x_0|^2 + |y_0|^2) - \frac{\sigma}{T - t_0} > 0 \end{aligned}$$

et donc

$$u_0(x_0) - u_0(y_0) - \|\nabla u_0\|_\infty |x_0 - y_0| > \beta(|x_0|^2 + |y_0|^2) + \frac{\sigma}{T - t_0} \geq 0$$

ce qui est absurde avec l'inégalité des accroissements finis. On a aussi $t_0 < T$ puisque la fonction $(t,x,y) \mapsto u(t,x) - u(t,y) - C_\delta(t)|x - y| - \beta(|x|^2 + |y|^2) - \frac{\sigma}{T-t}$ tend vers $-\infty$ lorsque t tend vers T.
Donc finalement on a montré que $(t_0, x_0, y_0) \in]0, T[\times (\mathbb{R}^n)^2$ et $x_0 \neq y_0$. Ainsi, pour α assez petit, on aura $(t_\alpha, x_\alpha, y_\alpha) \in]0, T[\times (\mathbb{R}^n)^2$ et $x_\alpha \neq y_\alpha$. On considère désormais $\alpha > 0$ assez petit pour que cette condition soit réalisée.
Écrivons maintenant des inégalités de viscosité. On va utiliser que u est sous-solution en (t_α, x_α). On pose

$$\varphi(t,x) = u(s_\alpha, y_\alpha) + C_\delta(t)|x - y_\alpha| + \frac{(t - s_\alpha)^2}{2\alpha} + \beta(|x|^2 + |y_\alpha|^2) + \frac{\sigma}{T - t}$$

comme fonction test, on a alors le fait que $u - \varphi$ atteint un maximum en (t_α, x_α). De plus,

$$\partial_t \varphi(t_\alpha, x_\alpha) = C'_\delta(t_\alpha)|x_\alpha - y_\alpha| + \frac{t_\alpha - s_\alpha}{\alpha} + \frac{\sigma}{(T - t_\alpha)^2} \quad \text{et} \quad \nabla_x \varphi(t_\alpha, x_\alpha) = C_\delta(t_\alpha)\frac{x_\alpha - y_\alpha}{|x_\alpha - y_\alpha|} + 2\beta x_\alpha.$$

Donc on obtient

$$C'_\delta(t_\alpha)|x_\alpha - y_\alpha| + \frac{t_\alpha - s_\alpha}{\alpha} + \frac{\sigma}{(T - t_\alpha)^2} + H\left(t_\alpha, x_\alpha, C_\delta(t_\alpha)\frac{x_\alpha - y_\alpha}{|x_\alpha - y_\alpha|} + 2\beta x_\alpha\right) \leq 0. \tag{2}$$

De la même manière, en utilisant que u est sur-solution en (s_α, y_α) et en prenant ψ définie par

$$\psi(s,y) = u(t_\alpha, x_\alpha) - C_\delta(t_\alpha)|x_\alpha - y| - \frac{(t_\alpha - s)^2}{2\alpha} - \beta(|x_\alpha|^2 + |y|^2) - \frac{\sigma}{T - t_\alpha},$$

on obtient

$$\frac{t_\alpha - s_\alpha}{\alpha} + H\left(s_\alpha, y_\alpha, C_\delta(t_\alpha)\frac{x_\alpha - y_\alpha}{|x_\alpha - y_\alpha|} - 2\beta y_\alpha\right) \geq 0. \tag{3}$$

En faisant la différence de (2) et (3), on aboutit à

$$\begin{aligned} &\frac{\sigma}{(T - t_\alpha)^2} + C'_\delta(t_\alpha)|x_\alpha - y_\alpha| \\ &\quad \leq H\left(s_\alpha, y_\alpha, C_\delta(t_\alpha)\frac{x_\alpha - y_\alpha}{|x_\alpha - y_\alpha|} - 2\beta y_\alpha\right) - H\left(t_\alpha, x_\alpha, C_\delta(t_\alpha)\frac{x_\alpha - y_\alpha}{|x_\alpha - y_\alpha|} + 2\beta x_\alpha\right) \\ &\quad = H\left(s_\alpha, y_\alpha, C_\delta(t_\alpha)\frac{x_\alpha - y_\alpha}{|x_\alpha - y_\alpha|} - 2\beta y_\alpha\right) - H\left(t_\alpha, y_\alpha, C_\delta(t_\alpha)\frac{x_\alpha - y_\alpha}{|x_\alpha - y_\alpha|} - 2\beta y_\alpha\right) \\ &\qquad + H\left(t_\alpha, y_\alpha, C_\delta(t_\alpha)\frac{x_\alpha - y_\alpha}{|x_\alpha - y_\alpha|} - 2\beta y_\alpha\right) - H\left(t_\alpha, x_\alpha, C_\delta(t_\alpha)\frac{x_\alpha - y_\alpha}{|x_\alpha - y_\alpha|} - 2\beta y_\alpha\right) \\ &\qquad + H\left(t_\alpha, x_\alpha, C_\delta(t_\alpha)\frac{x_\alpha - y_\alpha}{|x_\alpha - y_\alpha|} - 2\beta y_\alpha\right) - H\left(t_\alpha, x_\alpha, C_\delta(t_\alpha)\frac{x_\alpha - y_\alpha}{|x_\alpha - y_\alpha|} + 2\beta x_\alpha\right). \end{aligned}$$

Lorsque α tend vers 0, le premier terme dans le membre de droite tend vers 0 puisque $(t_\alpha)_\alpha$ et $(s_\alpha)_\alpha$ ont la même limite et H est continu. Concernant le deuxième terme, on utilise l'hypothèse faite sur H pour obtenir

$$\begin{aligned} &H\left(t_\alpha, y_\alpha, C_\delta(t_\alpha)\frac{x_\alpha - y_\alpha}{|x_\alpha - y_\alpha|} - 2\beta y_\alpha\right) - H\left(t_\alpha, x_\alpha, C_\delta(t_\alpha)\frac{x_\alpha - y_\alpha}{|x_\alpha - y_\alpha|} - 2\beta y_\alpha\right) \\ &\quad \leq L_1|x_\alpha - y_\alpha|(C_\delta(t_\alpha) + 2\beta|y_\alpha|) + L_2|x_\alpha - y_\alpha|. \end{aligned}$$

On va maintenant estimer le terme $\beta|y_\alpha|$ (et simultanément le terme $\beta|x_\alpha|$ car ça nous sera utile par la suite). On a :

$$0 < M \leq M_\alpha \leq 2\|u\|_\infty - \beta|x_\alpha|^2 - \beta|y_\alpha|^2,$$

ce qui implique

$$\beta|x_\alpha|^2 + \beta|y_\alpha|^2 \leq 2\|u\|_\infty \quad \text{et donc} \quad \sqrt{\beta}\sqrt{\beta\max(|x_\alpha|, |y_\alpha|)^2} \leq \sqrt{2\|u\|_\infty}\sqrt{\beta}.$$

D'où

$$\beta|y_\alpha| \leq \sqrt{2\|u\|_\infty}\sqrt{\beta} \quad \text{et} \quad \beta|x_\alpha| \leq \sqrt{2\|u\|_\infty}\sqrt{\beta}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} &H\left(t_\alpha, y_\alpha, C_\delta(t_\alpha)\frac{x_\alpha - y_\alpha}{|x_\alpha - y_\alpha|} - 2\beta y_\alpha\right) - H\left(t_\alpha, x_\alpha, C_\delta(t_\alpha)\frac{x_\alpha - y_\alpha}{|x_\alpha - y_\alpha|} - 2\beta y_\alpha\right) \\ &\quad \leq L_1|x_\alpha - y_\alpha|\left(C_\delta(t_\alpha) + 2\sqrt{2}\sqrt{\|u\|_\infty}\sqrt{\beta}\right) + L_2|x_\alpha - y_\alpha|. \end{aligned}$$

On veut maintenant estimer la différence

$$H\left(t_\alpha, x_\alpha, C_\delta(t_\alpha)\frac{x_\alpha - y_\alpha}{|x_\alpha - y_\alpha|} - 2\beta y_\alpha\right) - H\left(t_\alpha, x_\alpha, C_\delta(t_\alpha)\frac{x_\alpha - y_\alpha}{|x_\alpha - y_\alpha|} + 2\beta x_\alpha\right).$$

Pour cela, on utilise (1) car on a :

$$2\beta|x_\alpha + y_\alpha| \leq 2\beta(|x_\alpha| + |y_\alpha|) \leq 4\sqrt{2\|u\|_\infty}\sqrt{\beta}.$$

donc

$$H\left(t_\alpha, x_\alpha, C_\delta(t_\alpha)\frac{x_\alpha - y_\alpha}{|x_\alpha - y_\alpha|} - 2\beta y_\alpha\right) - H\left(t_\alpha, x_\alpha, C_\delta(t_\alpha)\frac{x_\alpha - y_\alpha}{|x_\alpha - y_\alpha|} + 2\beta x_\alpha\right) \leq \varepsilon.$$

En récapitulant, on a obtenu :

$$\begin{aligned} &\frac{\sigma}{(T - t_\alpha)^2} + C'_\delta(t_\alpha)|x_\alpha - y_\alpha| \\ &\quad \leq H\left(s_\alpha, y_\alpha, C_\delta(t_\alpha)\frac{x_\alpha - y_\alpha}{|x_\alpha - y_\alpha|} - 2\beta y_\alpha\right) - H\left(t_\alpha, y_\alpha, C_\delta(t_\alpha)\frac{x_\alpha - y_\alpha}{|x_\alpha - y_\alpha|} - 2\beta y_\alpha\right) \\ &\qquad + L_1|x_\alpha - y_\alpha|\left(C_\delta(t_\alpha) + 4\sqrt{2}\sqrt{\|u\|_\infty}\sqrt{\beta}\right) + L_2|x_\alpha - y_\alpha| + \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc en passant à la limite $\alpha \to 0$, on a :

$$\frac{\sigma}{(T - t_0)^2} + C'_\delta(t_0)|x_0 - y_0| \leq L_1|x_0 - y_0|\left(C_\delta(t_0) + 2\sqrt{2}\sqrt{\|u\|_\infty}\sqrt{\beta}\right) + L_2|x_0 - y_0| + \varepsilon$$

et donc

$$\frac{\sigma}{2T^2} + (L_1 C_\delta(t_0) + L_2 + \delta)|x_0 - y_0| \leq \left(L_1 C_\delta(t_0) + L_2 + 2L_1\sqrt{2}\sqrt{\|u\|_\infty}\sqrt{\beta}\right)|x_0 - y_0| + \varepsilon$$

i.e.

$$\frac{\sigma}{2T^2} + \delta|x_0 - y_0| \leq \varepsilon + 2L_1\sqrt{2}\sqrt{\|u\|_\infty}\sqrt{\beta}|x_0 - y_0|$$

ce qui est absurde puisqu'on avait fixé $\varepsilon < \frac{\sigma}{2T^2}$ et β tel que $2L_1\sqrt{2}\sqrt{\|u\|_\infty}\sqrt{\beta} < \delta$.

2. On a montré que pour tous $\sigma > 0$, $\delta > 0$ et $\beta > 0$ tel que $2L_1\sqrt{2}\sqrt{\|u\|_\infty}\sqrt{\beta} < \delta$, on a pour tous t, x, y :

$$u(t,x) - u(t,y) - C_\delta(t)|x-y| - \beta(|x|^2 + |y|^2) - \frac{\sigma}{T - t^2} \leq 0.$$

En faisant tendre δ (et donc β vers 0) et σ vers 0, on arrive à

$$u(t,x) - u(t,y) - C(t)|x-y| \leq 0$$

où

$$C(t) = e^{L_1 t}\|\nabla u_0\|_\infty + \frac{L_2}{L_1}\left(e^{L_1 t} - 1\right),$$

ce qui nous donne la conclusion souhaitée.

Exercice 2 : formule de Lax-Oleinik

1. D'après la formule de Lax-Oleinik, on a pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}$,

$$u(t,x) = \inf_{y\in\mathbb{R}}\left\{|y| + \frac{1}{2t}|y-x|^2\right\}.$$

On note $\bar{y}$ un point qui réalise la borne inférieure. Si $\bar{y} \neq 0$, on obtient la condition nécessaire d'optimalité suivante :

$$\frac{\bar{y}}{|\bar{y}|} + \frac{\bar{y} - x}{t} = 0.$$

Si $\bar{y} > 0$, ceci donne $(\bar{y} - x)/t = -1$ et donc $\bar{y} = x - t$ et $u(t,x) = |x-t| + t/2$. Si $\bar{y} < 0$, on obtient $(\bar{y} - x)/t = 1$ et donc $\bar{y} = x + t$ et $u(t,x) = |x+t| + t/2$. Ainsi,

$$u(t,x) = \inf\left\{|x-t| + \frac{t}{2}, |x+t| + \frac{t}{2}, \frac{x^2}{2t}\right\}.$$

Finalement, en distinguant les cas, on obtient :

$$u(t,x) = \begin{cases} |x| - \dfrac{t}{2} & \text{si} \quad |x| \geq t \\ \dfrac{x^2}{2t} & \text{si} \quad |x| \leq t. \end{cases}$$

2. D'après la formule de Lax-Oleinik, on a pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}$,

$$u(t,x) = \inf_{y\in\mathbb{R}}\left\{-|y| + \frac{1}{2t}|y-x|^2\right\}.$$

On note $\bar{y}$ un point qui réalise la borne inférieure. Si $\bar{y} \neq 0$, on obtient la condition nécessaire d'optimalité suivante :

$$-\frac{\bar{y}}{|\bar{y}|} + \frac{\bar{y} - x}{t} = 0.$$

Si $\bar{y} > 0$ (resp. $\bar{y} < 0$), cela nous donne $\bar{y} = x + t > 0$ (resp. $\bar{y} = x - t < 0$). Donc

$$u(t,x) = \inf\left\{-|x+t| + \frac{t}{2}, -|x-t| + \frac{t}{2}, \frac{x^2}{2t}\right\}.$$

En distinguant les cas, on obtient

$$u(t,x) = -|x| - \frac{t}{2}.$$

3. D'après la formule de Lax-Oleinik, on a pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \inf_{y\in\mathbb{R}}\left\{u_0(y) + \frac{1}{2t}|y-x|^2\right\} \\ &= \inf\left\{\inf_{|y|\geq 1}\left\{-|y| + \frac{1}{2t}|y-x|^2\right\}, \inf_{|y|\leq 1}\left\{-\frac{1}{2}(y^2+1) + \frac{1}{2t}|y-x|^2\right\}\right\} \\ &= \inf\{u_1(t,x), u_2(t,x)\}. \end{aligned}$$

On commence par étudier la fonction f_1 définie par $f_1(y) = -y + \frac{1}{2t}(y-x)^2$ pour $y \geq 1$. On a :

$$f_1'(y) = -1 + \frac{y-x}{t}.$$

Donc

$$\begin{aligned} &\text{si } x+t \geq 1, \ \inf_{y\geq 1} f_1(y) = f_1(x+t) = -x - \frac{t}{2}, \\ &\text{si } x+t \leq 1, \ \inf_{y\geq 1} f_1(y) = f_1(1) = -1 + \frac{1}{2t}(1-x)^2. \end{aligned}$$

Puis, on étudie la fonction f_2 définie par $f_2(y) = y + \frac{1}{2t}(y-x)^2$ pour $y \leq -1$. On a :

$$f_2'(y) = 1 + \frac{y-x}{t}.$$

Donc

$$\begin{aligned} &\text{si } x-t \geq -1, \ \inf_{y\leq -1} f_2(y) = f_2(-1) = -1 + \frac{1}{2t}(1+x)^2, \\ &\text{si } x-t \leq -1, \ \inf_{y\leq -1} f_2(y) = f_2(x-t) = x - \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

On distingue maintenant les cas $t \geq 1$ et $t < 1$. On suppose dans un premier temps que $t \geq 1$. Dans ce cas, on a obtenu :

$$\begin{aligned} &\text{si } x \geq t-1, \ u_1(t,x) = \inf\left\{-x - \frac{t}{2}, -1 + \frac{1}{2t}(1+x)^2\right\} = -x - \frac{t}{2} \\ &\text{si } |x| \leq t-1, \ u_1(t,x) = \inf\left\{-x - \frac{t}{2}, x - \frac{t}{2}\right\} = -|x| - \frac{t}{2} \\ &\text{si } x \leq 1-t, \ u_1(t,x) = \inf\left\{x - \frac{t}{2}, -1 + \frac{1}{2t}(1-x)^2\right\} = x - \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

et donc
$$\text{si } t \geq 1,\ u_1(t,x) = -|x| - \frac{t}{2}.$$
Traitons maintenant le cas $t < 1$. Dans ce cas, on a obtenu :
$$\begin{aligned}
&\text{si } x \geq 1-t,\ u_1(t,x) = \inf\left\{-x - \frac{t}{2}, -1 + \frac{1}{2t}(1+x)^2\right\} = -x - \frac{t}{2}\\
&\text{si } |x| \leq 1-t,\ u_1(t,x) = \inf\left\{-1 + \frac{1}{2t}(1-x)^2, -1 + \frac{1}{2t}(1+x)^2\right\} = -1 + \frac{1}{2t}(1-|x|)^2\\
&\text{si } x \leq t-1,\ u_1(t,x) = \inf\left\{x - \frac{t}{2}, -1 + \frac{1}{2t}(1-x)^2\right\} = x - \frac{t}{2}.
\end{aligned}$$
(Pour le calcul des inf, on étudie à chaque fois la différence des deux quantités.) Donc,
$$\begin{aligned}
&\text{si } t < 1 \text{ et } |x| \geq 1-t,\ u_1(t,x) = -|x| - \frac{t}{2}\\
&\text{si } t < 1 \text{ et } |x| \leq 1-t,\ u_1(t,x) = -1 + \frac{1}{2t}(1-|x|)^2.
\end{aligned}$$
Il faut maintenant étudier u_2. Pour cela, on pose $g(y) = -\frac{1}{2}(y^2+1) + \frac{1}{2t}|y-x|^2$ pour $|y| \leq 1$. On a :
$$g'(y) = -y + \frac{y-x}{t}.$$
On traite d'abord le cas $t = 1$. On a alors
$$u_2(1,x) = \frac{x^2}{2} - |x| - \frac{1}{2}$$
Concernant maintenant le cas $t > 1$, on a :
$$\forall\, x,\ u_2(t,x) = \inf\{g(1), g(-1)\} = -1 + \frac{1}{2t}(1-|x|)^2.$$
On traite enfin le cas $t < 1$. On a :
$$\begin{aligned}
&\text{si } |x| \leq 1-t,\ u_2(t,x) = g\left(\frac{x}{1-t}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2(1-t)}\\
&\text{si } |x| \geq 1-t,\ u_2(t,x) = -1 + \frac{1}{2t}(1-|x|)^2.
\end{aligned}$$
On peut maintenant conclure. Lorsque $t > 1$,
$$\forall\, x,\ u(t,x) = \inf\left\{-1 + \frac{1}{2t}(1-|x|)^2, -|x| - \frac{t}{2}\right\} = -|x| - \frac{t}{2}$$
i.e.
$$u(t,x) = -|x| - \frac{t}{2}, \quad \forall\, t > 1,\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$
Lorsque $t = 1$, on a :
$$u(1,x) = \inf\left\{-|x| - \frac{1}{2}, \frac{x^2}{2} - |x| - \frac{1}{2}\right\} = -|x| - \frac{1}{2}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Enfin, lorsque $t < 1$, on a :

$$\text{si } |x| \leq 1-t,\ u(t,x) = \inf\left\{-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2(1-t)}, -1 + \frac{1}{2t}(1-|x|)^2\right\} = -\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2(1-t)}$$
$$\text{si } |x| \geq 1-t,\ u(t,x) = \inf\left\{-1 + \frac{1}{2t}(1-|x|)^2, -|x| - \frac{t}{2}\right\} = -|x| - \frac{t}{2}.$$

Exercice 3 : suites de solutions de viscosité

1. On traite uniquement le cas des sous-solutions. Soit $x_0 \in \Omega$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ telle que $u - \varphi$ atteint un maximum local en x_0. On suppose ce maximum local strict sur $\bar{B}(x_0, , r)$ pour $r > 0$ assez petit :

$$u(x_0) - \varphi(x_0) > u(x) - \varphi(x), \quad \forall\, x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\}.$$

Montrons qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Ω telle que $x_n \to x_0$ et

$$(u_n - \varphi)(x_n) \geq (u_n - \varphi)(x), \quad \forall\, x \in \bar{B}(x_0, r).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère x_n un point où $u_n - \varphi$ atteint un maximum sur $\bar{B}(x_0, r)$. Quitte à extraire, on peut supposer que cette suite converge vers un point $\tilde{x} \in \bar{B}(x_0, r)$. On a alors par convergence uniforme :

$$(u_n - \varphi)(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (u - \varphi)(\tilde{x}).$$

De plus, comme on a par définition de x_n

$$(u_n - \varphi)(x_n) \geq (u_n - \varphi)(x), \quad \forall\, x \in \bar{B}(x_0, r),$$

en passant à la limite, on en déduit

$$(u - \varphi)(\tilde{x}) \geq (u - \varphi)(x), \quad \forall\, x \in \bar{B}(x_0, r).$$

et donc en particulier,

$$(u - \varphi)(\tilde{x}) \geq (u - \varphi)(x_0).$$

Comme x_0 est un maximum local strict sur $\bar{B}(x_0, r)$, on en déduit que $\tilde{x} = x_0$ et on a donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to x_0$ et

$$(u_n - \varphi)(x_n) \geq (u_n - \varphi)(x), \quad \forall\, x \in \bar{B}(x_0, r).$$

Ainsi, pour n assez grand, comme $x_n \in B(x_0, r)$, la fonction $u_n - \varphi$ admet un maximum local en x_n et donc puisque u_n est sous-solution de viscosité de $F_n(x, u_n(x), \nabla u_n(x)) = 0$ en x_n,

$$F_n(x_n, u_n(x_n), \nabla\varphi(x_n)) \leq 0.$$

Puisque $x_n \to x_0$, on en déduit en passant à la limite que

$$F(x_0, u(x_0), \nabla\varphi(x_0)) \leq 0$$

et donc u est une sous-solution de viscosité de $F(x, u(x), \nabla u(x)) = 0$ en x_0.

2. Le but de cette question est de voir que le résultat précédent fonctionne avec les solutions de viscosité mais pas avec les solutions au sens presque partout. On vérifie facilement que u_n est solution presque partout de $|u'(x)|-1=0$ sur $]0,1[$. De plus, on voit aussi que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle qui elle ne vérifie l'équation $|u'(x)|-1=0$ en aucun point de $]0,1[$. On peut aussi voir que u_n pour $n\geq 2$ n'est pas solution de viscosité de $|u'(x)|-1=0$ sur $]0,1[$. Plaçons-nous en un point $x_k=2k2^{-n}$ pour $k\in[\![1,2^{n-1}-1]\!]$. La fonction $\varphi=0$ est une fonction test qui touche u_n par dessous en x_k mais $|\varphi'(x_k)|-1=-1$ n'est pas positif donc la condition de sur-solution n'est pas vérifiée.

Exercice 4 : solutions au sens presque partout et solutions de viscosité

1. a) On suppose qu'il existe une fonction η définie au voisinage de x telle que $\eta(y)\to 0$ lorsque $y\to x$ et telle que

$$\frac{u(y)-u(x)-p\cdot(y-x)}{|x-y|}\geq \eta(y)\quad \text{au voisinage de } x.$$

Alors il existe $\varepsilon_0>0$ tel que pour tout $\varepsilon\leq\varepsilon_0$, on a

$$\frac{u(y)-u(x)-p\cdot(y-x)}{|x-y|}\geq \eta(y),\quad \forall\, y\in B(x,\varepsilon).$$

Donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\inf_{B(x,\varepsilon)}\frac{u(y)-u(x)-p\cdot(y-x)}{|x-y|}\geq \lim_{\varepsilon\to 0}\inf_{B(x,\varepsilon)}\eta(y)=0\quad\text{i.e.}\quad \varliminf_{y\to x}\frac{u(y)-u(x)-p\cdot(y-x)}{|y-x|}\geq 0.$$

Inversement, on suppose qu'on a

$$\varliminf_{y\to x}\frac{u(y)-u(x)-p\cdot(y-x)}{|y-x|}\geq 0.$$

On pose alors

$$\eta(y)=\min\left(0,\inf_{z\in\bar{B}(x,|y-x|)}\frac{u(z)-u(x)-p\cdot(z-x)}{|x-z|}\right).$$

Puisque $y\in\bar{B}(x,|y-x|)$, on a

$$\frac{u(y)-u(x)-p\cdot(y-x)}{|x-y|}\geq\eta(y).$$

D'autre part, par définition de la limite inférieure, on a :

$$\lim_{y\to x}\inf_{z\in\bar{B}(x,|y-x|)}\frac{u(z)-u(x)-p\cdot(z-x)}{|x-z|}=\varliminf_{y\to x}\frac{u(y)-u(x)-p\cdot(y-x)}{|y-x|}\geq 0.$$

Si cette limite inférieure est nulle, on a directement $\eta(y)\to 0$ lorsque $y\to x$. Si elle est strictement positive, pour y assez proche de x, on aura $\eta(y)=0$. Finalement, dans tous les cas, on a $\eta(y)\to 0$ lorsque $y\to x$, ce qui permet de conclure.

b) On a clairement que si $p\in\partial u(x)$, alors $p\in D^-u(x)$. Inversement, on suppose que $p\in D^-u(x)$ et donc

$$\varliminf_{y\to x}\frac{u(y)-u(x)-p\cdot(y-x)}{|y-x|}\geq 0.$$

En particulier, pour toute suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x telle que $|y_k - x| \leq 1/k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{u(y_n) - u(x) - p\cdot(y_n - x)}{|y_n - x|} \geq 0 \tag{4}$$

car

$$\begin{aligned}\underline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{u(y_n) - u(x) - p\cdot(y_n - x)}{|y_n - x|} &= \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geq n} \frac{u(y_k) - u(x) - p\cdot(y_k - x)}{|y_k - x|} \\ &\geq \lim_{n\to+\infty} \inf_{y\in B(x,1/n)} \frac{u(y) - u(x) - p\cdot(y - x)}{|y - x|}.\end{aligned}$$

Soit maintenant $z \in \mathbb{R}^n$, on veut montrer que

$$u(z) - u(x) - p\cdot(z - x) \geq 0.$$

Pour $z = x$, c'est évident. Pour cela, on choisit une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenue dans le segment d'extrémités z et x, qui converge vers x et telle que $|y_k - x| \leq 1/k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Il existe donc une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $[0,1]$ telle que $y_n = \lambda_n x + (1-\lambda_n)z$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par convexité de u, on a ainsi :

$$u(y_n) \leq \lambda_n u(x) + (1-\lambda_n)u(z)$$

et donc

$$u(z) - u(x) \geq \frac{u(y_n) - u(x)}{1-\lambda_n}.$$

D'autre part, on a aussi $y_n - x = (1-\lambda_n)(z-x)$ et donc en passant aux normes, $1-\lambda_n = |y_n - x|/|z-x|$. Ainsi, on a :

$$u(z) - u(x) \geq \frac{u(y_n) - u(x)}{|y_n - x|}\,|z-x| = \frac{u(y_n) - u(x) - p\cdot(y_n - x)}{|y_n - x|}\,|z-x| + \frac{p\cdot(y_n - x)}{|y_n - x|}\,|z-x|.$$

Finalement, on remarque que comme y_n est dans le segment d'extrémité x et z, on a :

$$\frac{y_n - x}{|y_n - x|} = \frac{z-x}{|z-x|}.$$

L'inégalité précédente s'écrit donc

$$u(z) - u(x) \geq \frac{u(y_n) - u(x) - p\cdot(y_n - x)}{|y_n - x|}\,|z-x| + p\cdot(z-x).$$

En utilisant (4) et en passant à la limite inférieure lorsque $n \to +\infty$, on obtient

$$u(z) - u(x) \geq p\cdot(z-x),$$

ce qui permet de conclure.

2. a) Pour tous x, y, p, $q \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$(p-q)\cdot\frac{y-x}{|y-x|} = \frac{u(y) - u(x) - q\cdot(y-x)}{|y-x|} - \frac{u(y) - u(x) - p\cdot(y-x)}{|y-x|}.$$

On pose $y_n = x + (p-q)/n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, d'après l'égalité précédente, on a :

$$|p-q| = \frac{u(y_n) - u(x) - q\cdot(y_n - x)}{|y_n - x|} - \frac{u(y_n) - u(x) - p\cdot(y_n - x)}{|y_n - x|}$$

et donc

$$(5) \qquad |p-q| \leq \overline{\lim_{y\to x}} \frac{u(y) - u(x) - q\cdot(y-x)}{|y-x|} - \underline{\lim_{y\to x}} \frac{u(y) - u(x) - p\cdot(y-x)}{|y-x|}.$$

Ainsi, si $D^-u(x)$ et $D^+u(x)$ sont non vides, on peut prendre $p \in D^-u(x)$ et $q \in D^+u(x)$ et d'après l'inégalité précédente (5), on obtient $p = q$. Ainsi, si $D^-u(x)$ et $D^+u(x)$ sont non vides, ils sont réduits à un singleton, ce qui signifie que u est différentiable en x et que $D^-u(x) = D^+u(x) = \{\nabla u(x)\}$.
b) Inversement, si u est différentiable en x alors $D^+u(x)$ et $D^-u(x)$ contiennent tous les deux $\nabla u(x)$ puisque

$$\lim_{y\to x} \frac{u(y) - u(x) - \nabla u(x)\cdot(y-x)}{|y-x|} = 0.$$

Donc toujours d'après l'inégalité (5), on obtient $D^-u(x) = D^+u(x) = \{\nabla u(x)\}$.
3. On a supposé que u est localement lipschtzienne sur $\mathbb{R}^n$ donc elle y est en particulier continue. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Si u est différentiable en x, d'après la quesiton 2.b), on a alors $D^-u(x) = D^+u(x) = \{\nabla u(x)\}$. Et donc d'après l'exercice 3 du TD 4 et la question 1.a), on a

$$0 \leq F(x, u(x), \nabla u(x)) \leq 0.$$

De plus, d'après le théorème de Rademacher, u est différentiable presque partout, donc on peut conclure.
4. a) Soit $C > 0$ telle que $\psi = u - C|\cdot|^2$ est concave. Alors, ψ est localement lipschtzienne et donc différentiable presque partout. De plus, son gradient est localement borné. Donc u est aussi différentiable presque partout et de gradient localement borné. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on peut choisir une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x et telle que u est différentiable en x_n pour tout n (prendre par exemple $x_n \in B(x, 1/n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$). La suite des gradients $(\nabla u(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est alors bornée (puisque ∇u est localement borné) et donc quitte à extraire, elle converge vers un certain $p \in \mathbb{R}^n$. On a alors $p \in D^*u(x)$. Ainsi, l'ensemble $D^*u(x)$ est non vide.
b) On suppose d'abord que u est différentiable en x. On peut écrire pour $h \in \mathbb{R}^n$

$$u(x+h) = \lim_{\lambda\to 0^+} u(x + (1-\lambda)h)$$

et

$$-\nabla u(x)\cdot h = \nabla u(x)\cdot(-h) = \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{u(x-\lambda h) - u(x)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0^+} (1-\lambda)\frac{u(x-\lambda h) - u(x)}{\lambda}.$$

Donc

$$u(x+h) - u(x) - \nabla u(x)\cdot h = \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{1}{\lambda}\left(\lambda u(x + (1-\lambda)h) + (1-\lambda)u(x-\lambda h) - u(x)\right).$$

En utilisant la C-semi-concavité de u, on a aussi

$$\lambda u(x + (1-\lambda)h) + (1-\lambda)u(x-\lambda h) - u(x) \leq C\lambda(1-\lambda)|h|^2$$

et donc
$$u(x+h)-u(x)-\nabla u(x)\cdot h\leq C|h|^2.$$
On ne suppose plus que u est différentiable en x et on considère $p\in D^*u(x)$. On choisit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x telle que u est différentiable en x_n pour tout n et telle que $\nabla u(x_n)$ converge vers p. D'après ce qui précède, on a aussi
$$u(x_n+h)-u(x_n)-\nabla u(x_n)\cdot h\leq C|h|^2,$$
ce qui implique en faisant tendre n vers $+\infty$ par continuité de u que
$$u(x+h)-u(x)-p\cdot h\leq C|h|^2$$
car u est semi-concave de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ donc y est continue.
c) La question b) implique en particulier que pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, $D^*u(x)\subset D^+u(x)$. Comme de plus, on a vu que $D^*u(x)\neq\emptyset$, on en déduit que $D^+u(x)\neq\emptyset$. Si de plus $D^-u(x)\neq\emptyset$, alors on a u différentiable en x.

5. D'après la question précédente, on a montré que pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, on a soit $D^-u(x)=\emptyset$ soit $D^-u(x)=D^+u(x)=\{\nabla u(x)\}$. Dans le premier cas, la condition de sur-solution est automatiquement vérifiée (voir TD 4 Exercice 3 avec la question 1.a)). On considère donc un point x où u est différentiable. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers x, telle que u est différentiable en x_n pour tout $n\in\mathbb{N}$ et telle que
$$F(x_n,u(x_n),\nabla u(x_n))\geq 0,\quad\forall n\in\mathbb{N}.\tag{6}$$
Comme u est localement lipschitzienne, par définition de $D^*u(x)$, quitte à extraire une sous-suite, on a :
$$\nabla u(x_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}p\in D^*u(x).$$
Comme on a
$$\emptyset\neq D^*u(x)\subset D^+u(x)=D^-u(x)=\{\nabla u(x)\},$$
on en déduit que $\nabla u(x_n)$ tend vers $\nabla u(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Ainsi, en passant à la limite dans (6), par continuité de F, on obtient
$$F(x,u(x),\nabla u(x))\geq 0$$
i.e.
$$F(x,u(x),p)\geq 0,\quad\forall p\in D^-u(x),$$
ce qui permet de conclure (voir TD 4 Exercice 3 avec la question 1.a)).

Exercice 5 : continuité des fonctions convexes en dimension finie

1. Il existe un voisinage V de 0 et une constante C telle que $f\leq C$ sur $x+V$. Quitte à remplacer V par $V\cap(-V)$ et quitte à diminuer V, on peut supposer que V est une boule centrée en 0 : $V=B(0,r)$ avec $r>0$. Soit $\varepsilon>0$. Alors $U_\varepsilon=x+\varepsilon V=B(x,\varepsilon r)$ est encore un voisinage de x et $f\leq C$ sur $U_\varepsilon\subset x+V$. On va commencer par montrer que f est aussi bornée inférieurement sur U_ε. Pour tout $z\in U_\varepsilon$, le point $2x-z$ est aussi dans la boule U_ε. Ainsi, on a par convexité de f :
$$f(x)\leq\frac{1}{2}f(z)+\frac{1}{2}f(2x-z)\leq\frac{1}{2}f(z)+\frac{C}{2}.$$

D'où
$$f(z) \geq 2f(x) - C, \quad \forall\, z \in U_\varepsilon.$$
Pour $z \in U_\varepsilon$, on va maintenant estimer $|f(z) - f(x)|$. D'une part, si $z = x + \varepsilon v \in U_\varepsilon$, on a :
$$f(z) = f((1-\varepsilon)x + \varepsilon(x+v)) \leq (1-\varepsilon)f(x) + \varepsilon f(x+v)$$
donc
$$f(z) - f(x) \leq -\varepsilon f(x) + \varepsilon C \leq 2\varepsilon C' \quad \text{avec} \quad C' = \max\{|f(x)|, C\}.$$
D'autre part, on peut écrire
$$f(x) = f\left(\frac{1}{1+\varepsilon} z + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}(x-v)\right) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} f(z) + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} f(x-v)$$
donc
$$f(x) - f(z) \leq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}(-f(z) + f(x-v)) \leq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}(-2f(x) + 2C) \leq 4\varepsilon C'.$$
On a ainsi montré que si $z \in U_\varepsilon$, on a $|f(z) - f(x)| \leq 4\varepsilon C'$. D'où la continuité de f en x.
2. a) On a clairement $\sup_A f \leq \sup_{\mathrm{conv}(A)} f$. Inversement, soit $y \in \mathrm{conv}(A)$. Alors il existe $m \in \mathbb{N}^*$, $(\lambda_1, \ldots \lambda_m) \in (\mathbb{R}_+)^m$ et $(x_1, \ldots, x_m) \in A^m$ tels que $y = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$ et $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$. On a alors par convexité de f,
$$f(y) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x_i) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i \sup_A f \leq \sup_A f.$$
Ainsi on a montré que $\sup_A f \geq \sup_{\mathrm{conv}(A)} f$.
b) Soit $y \in \mathrm{conv}(B)$. Alors il existe $(\mu_1, \ldots, \mu_{2n}) \in (\mathbb{R}_+)^{2n}$ tels que
$$y = \sum_{i=1}^n \mu_i(x + re_i) + \sum_{i=1}^n \mu_{i+n}(x - re_i) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{2n} \mu_i = 1$$
ce qui se réécrit
$$y - x = \sum_{i=1}^n r(\mu_i - \mu_{i+n})e_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{2n} \mu_i = 1.$$
On a alors
$$\sum_{i=1}^n r|\mu_i - \mu_{i+n}| \leq r \sum_{i=1}^{2n} \mu_i = r$$
donc $y \in \bar{B}_1(x, r)$.
Inversement, soit $y \in \bar{B}_1(x, r)$. Il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que
$$y - x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq r.$$
On pose
$$\mu_i = \frac{1}{2n} + \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{2rn} \quad \text{et} \quad \mu_{i+n} = \mu_i - \frac{\lambda_i}{r}, \quad \forall\, 1 \leq i \leq n.$$

Ainsi on a

$$y - x = \sum_{i=1}^{n}(\mu_i - \mu_{i+n})(re_i) = \sum_{i=1}^{n}\mu_i(re_i) - \sum_{i=1}^{n}\mu_{i+n}(re_i)$$

et

$$\sum_{i=1}^{2n}\mu_i = 2\sum_{i=1}^{n}\mu_i - \frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}{r} = 1 + \frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}{r} - \frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}{r} = 1,$$

donc

$$y = \sum_{i=1}^{n}\mu_i(x + re_i) + \sum_{i=1}^{n}\mu_{i+n}(x - re_i) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{2n}\mu_i = 1$$

et finalement $x \in \text{conv}(B)$.

3. Montrons que f est localement majorée dans l'intérieur de $\{y \in \mathbb{R}^n : f(y) < +\infty\}$. Soit donc x appartenant à l'intérieur de cet ensemble. Il existe $\delta > 0$ tel que $x + \delta\bar{B}_1(0,1) \subset \{y \in \mathbb{R}^n : f(y) < +\infty\}$. Mais d'après la question 2.b), la boule $x + \delta\bar{B}_1(0,1) = \bar{B}_1(x,\delta)$ est l'enveloppe convexe des $2n$ points

$$x + \delta e_1,\ x - \delta e_1,\ \ldots,\ x + \delta e_n,\ x - \delta e_n.$$

D'après la question 2.a), f est donc majorée par

$$\max\{f(x \pm \delta e_i),\ i = 1, \ldots, n\}$$

sur $\bar{B}_1(x,\delta)$. On conclut grâce à la question 1.

Exercice 6 : Hamiltonien convexe

1. Soit $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ tel que $\rho \geq 0$, $\text{supp}(\rho) \subset B(0,1)$ et $\int_{\mathbb{R}^n}\rho = 1$. On pose ensuite pour $\delta > 0$,

$$\rho_\delta(x) = \frac{1}{\delta^n}\rho\left(\frac{x}{\delta}\right).$$

Soit Ω' un ouvert borné strictement inclus dans Ω. On pose pour $x \in \Omega'$:

$$u_\delta(x) = (u * \rho_\delta)(x).$$

La fonction u_δ ainsi définie est $\mathcal{C}^1$ sur Ω' avec $\nabla u_\delta(x) = (\nabla u * \rho_\delta)(x)$ (on rappelle que ∇u est défini presque partout sur Ω par le théorème de Rademacher). De plus, u_δ converge uniformément vers u sur Ω'. Comme on a

$$u(y) + H(\nabla u(y)) \leq 0 \quad \text{p.p. sur } \Omega,$$

on en déduit

$$u_\delta(x) + \int_{\mathbb{R}^n} H(\nabla u(y))\rho_\delta(x-y)\,dy \leq 0 \quad \text{sur } \Omega'.$$

On utilise maintenant le fait que H est convexe. D'après l'inégalité de Jensen, on obtient :

$$u_\delta(x) + H(\nabla u_\delta(x)) \leq 0 \quad \text{sur } \Omega'.$$

De cela, comme u_δ est $\mathcal{C}^1$ sur Ω', on déduit que u_δ est sous-solution de viscosité de

$$u(x) + H(\nabla u(x)) = 0 \quad \text{sur } \Omega'.$$

Enfin, en utilisant le fait $u_\delta \to u$ localement uniformément et la question 1. de l'exercice 3, on peut conclure que u est une sous-solution de viscosité de

$$u(x) + H(\nabla u(x)) = 0 \quad \text{sur } \Omega'.$$

Ceci étant vrai pour tout Ω' borné strictement inclus dans Ω, on peut conclure.
2. De la même manière qu'à la question précédente, on obtient

$$u_\delta(x) + \int_{\mathbb{R}^n} H(y, \nabla u(y))\rho_\delta(x-y)\,dy \leq 0 \quad \text{sur } \Omega'$$

autrement dit

$$u_\delta(x) + \int_{\mathbb{R}^n} H(x, \nabla u(y))\rho_\delta(x-y)\,dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(H(x, \nabla u(y)) - H(y, \nabla u(y))\right)\rho_\delta(x-y)\,dy \quad \text{sur } \Omega'.$$

On utilise maintenant que H est convexe par rapport à sa deuxième variable et l'inégalité de Jensen, cela donne :

$$u_\delta(x) + H(x, \nabla u_\delta(x)) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(H(x, \nabla u(y)) - H(y, \nabla u(y))\right)\rho_\delta(x-y)\,dy = h_\delta(x) \quad \text{sur } \Omega'.$$

Par continuité de H, h_δ converge uniformément vers 0 lorsque δ tend vers 0. Comme u_δ est $\mathcal{C}^1$ sur Ω', on en déduit que u_δ est sous-solution de viscosité de

$$u(x) + H(x, \nabla u(x)) - h_\delta(x) = 0 \quad \text{sur } \Omega'.$$

Enfin, en utilisant le fait $u_\delta \to u$ localement uniformément et toujours d'après la question 1. de l'exercice 3, on peut conclure que u est une sous-solution de viscosité de

$$u(x) + H(x, \nabla u(x)) = 0 \quad \text{sur } \Omega.$$