Corrigé n°7

Exercice 1 : injections de Sobolev

1. On a l'égalité suivante :

$$\|f\|_{L^q}^q = \int_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|^q \, dx = \int_{x\in\mathbb{R}^n} \int_0^{|f(x)|} q\,\lambda^{q-1}\, d\lambda\, dx$$

que l'on peut réécrire de la façon suivante :

$$\|f\|_{L^q}^q = \int_{x\in\mathbb{R}^n} \int_{\lambda\in\mathbb{R}^+} \mathbb{1}_{|f(x)|>\lambda}\, q\,\lambda^{q-1}\, d\lambda\, dx = \int_{\lambda\in\mathbb{R}^+} q\,\lambda^{q-1} \int_{x\in\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{|f(x)|>\lambda}\, dx\, d\lambda$$

où l'on a utilisé le théorème de Fubini dans la dernière égalité. On en déduit alors le résultat.

2. On commence par montrer qu'il existe $C_1(s,n)$ une constante strictement positive dépendant uniquement de n et de s telle que $\|g_\lambda\|_{L^\infty} \le C_1(s,n) A_\lambda^{\frac{n}{2}-s}$. D'après le théorème d'inversion de Fourier, on a

$$|g_\lambda(x)| = \left| \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\cdot\xi} \widehat{g_\lambda}(\xi)\, d\xi \right| = \left| \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{|\xi|\le A_\lambda} e^{ix\cdot\xi} \widehat{f}(\xi)\, d\xi \right|.$$

Comme $2s < n$, on peut utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui donne

$$|g_\lambda(x)| \le \frac{1}{(2\pi)^n} \left(\int_{|\xi|\le A_\lambda} |\xi|^{-2s}\, d\xi \right)^{\frac12} \left(\int |\xi|^{2s} |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi \right)^{\frac12}.$$

En passant en coordonnées polaires, on a

$$\int_{|\xi|\le A_\lambda} |\xi|^{-2s}\, d\xi = \int_0^{A_\lambda} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} r^{n-1-2s}\, d\theta\, dr = \frac{|\mathbb{S}^{n-1}| A_\lambda^{n-2s}}{n-2s}$$

ce qui nous donne l'inégalité souhaitée avec $C_1(s,n) = |\mathbb{S}^{n-1}|^{1/2}/((2\pi)^n (n-2s)^{1/2})$.
On définit ensuite A_λ par $C_1(s,n) A_\lambda^{n/2-s} = \lambda/2$. On a alors $\|g_\lambda\|_\infty \le \lambda/2$ puisqu'on a supposé $\|f\|_{\dot{H}^s} = 1$. Or g_λ est une fonction continue comme transformée de Fourier d'une fonction intégrable donc on en déduit que $\{|g_\lambda| > \lambda/2\} = \emptyset$.

3. D'après l'inégalité triangulaire,

$$\{|f| > \lambda\} \subset \{|g_\lambda| > \lambda/2\} \cup \{|h_\lambda| > \lambda/2\}.$$

La constante A_λ étant telle que $\{|g_\lambda| > \lambda/2\} = \emptyset$, on en déduit

$$|\{|f| > \lambda\}| \le |\{|h_\lambda| > \lambda/2\}| \le \frac{4}{\lambda^2} \|h_\lambda\|_{L^2}^2,$$

car

$$\|h_\lambda\|_{L^2}^2 \ge \int_{\{|h_\lambda|>\lambda/2\}} |h_\lambda|^2\, dx \ge \frac{\lambda^2}{4} |\{|h_\lambda| > \lambda/2\}|.$$

En utilisant la question 1., on conclut à l'inégalité voulue.

4. D'après l'inégalité obtenue à la question 3., la définition de h_λ et la formule de Plancherel, on a :

$$\|f\|_{L^q}^q \leq 4q\,(2\pi)^{-n} \int_0^{+\infty} \int_{|\xi|>A_\lambda} \lambda^{q-3}\,|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi\,d\lambda.$$

Par définition de A_λ,

$$|\xi| > A_\lambda \Leftrightarrow \lambda < \Lambda(\xi) := 2\,C_1(s,n)|\xi|^{\frac{n}{2}-s},$$

donc, en utilisant le théorème de Fubini, il vient

$$\|f\|_{L^q}^q \leq 4q\,(2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^{\Lambda(\xi)} \lambda^{q-3} d\lambda \right) |\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi,$$

d'où

$$\|f\|_{L^q}^q \leq C_2(s,n) \int_{\mathbb{R}^n} \Lambda(\xi)^{q-2}\,|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi,$$

où $C_2(s,n)$ est une constante positive dépendant de s et n. De plus, $n/2 - s = n/q$, on a donc $\Lambda(\xi) = 2\,C_1(s,n)|\xi|^{\frac{n}{q}}$ puis on obtient :

$$\|f\|_{L^q}^q \leq C_3(s,n) \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{\frac{n(q-2)}{q}}\,|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi = C_3(s,n) \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s}\,|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi$$

où $C_3(s,n)$ est une constante positive dépendant de s et n.

5. Remarquons tout d'abord que l'inégalité prouvée à la question 4. est également valable dans le cas où $\|f\|_{\dot{H}^s} \neq 1$. Pour le cas $p = q$, c'est directement une conséquence de la remarque précédente. Si $2 \leq p < q = 2n/(n-2s)$, alors il existe $s' \in [0, s[$ tel que $p = 2n/(n-2s')$ et donc d'après ce qui précède, pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$\|f\|_{L^p} \leq C\,\|f\|_{\dot{H}^{s'}} \leq C\,\|f\|_{H^s}$$

(remarquons qu'on ne peut pas majorer directement $\|f\|_{\dot{H}^{s'}}$ par $\|f\|_{\dot{H}^s}$ mais par $\|f\|_{H^s}$ en distinguant les cas $|\xi| \leq 1$ et $|\xi| \geq 1$). Enfin, un argument de densité de $\mathcal{S}$ dans H^s nous permet de conclure.

6. D'après la question précédente, on a l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\|f\|_{L^p} \leq C\,\|f\|_{\dot{H}^{s_p}}.$$

De plus, on peut montrer que si $(s_1, s_2) \in (\mathbb{R}^+)^2$ et $\theta \in [0,1]$, on a

$$\|f\|_{\dot{H}^{\theta s_1 + (1-\theta)s_2}} \leq \|f\|_{\dot{H}^{s_1}}^\theta\,\|f\|_{\dot{H}^{s_2}}^{1-\theta}.$$

En effet, en appliquant l'inégalité de Hölder avec la mesure $|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi$ et avec les fonctions $|\xi|^{\theta s_1}$ et $|\xi|^{(1-\theta)s_2}$, on obtient l'inégalité voulue. En prenant $(s_1, s_2) = (s, 0)$ et $\theta = s_p/s$, on en déduit que

$$\|f\|_{\dot{H}^{s_p}} \leq \|f\|_{L^2}^{1-\theta}\,\|f\|_{\dot{H}^s}^\theta,$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 2 : espaces de Sobolev sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$

1. On a facilement $uv \in L^2(\Omega)$ car $v \in L^\infty(\Omega)$. Montrons maintenant que uv a une dérivée au sens faible dans $L^2(\Omega)$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$. Alors $\phi = v\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$. On a pour tout $j = 1, \dots, n$:

$$\int_\Omega (\partial_j u) v\varphi = -\int_\Omega u\partial_j(v\varphi),$$

ce qui nous donne

$$-\int_\Omega \left(u(\partial_j v) + (\partial_j u)v\right)\varphi = \int_\Omega uv(\partial_j \varphi).$$

De plus, $u(\partial_j v) + (\partial_j u)v \in L^2(\Omega)$ puisque u et $\partial_j u \in L^2(\Omega)$ et v et $\partial_j v \in L^\infty(\Omega)$. On conclut que uv a une dérivée au sens faible dans $L^2(\Omega)$ par rapport à x_j pour tout j et que

$$\partial_j(uv) = (\partial_j u)v + u(\partial_j v), \quad \forall\, j = 1, \dots, n.$$

2. D'après le rappel dans l'énoncé, on peut écrire u comme la limite d'une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$. Montrons maintenant que la suite $(\eta u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (qui est une suite de $\mathcal{C}_0^1(\Omega)$) tend vers ηu pour la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$. On a :

$$|\eta u_k - \eta u| \le \|\eta\|_\infty |u_k - u|$$

et donc

$$\|\eta u_k - \eta u\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

De plus, d'après la question précédente, on a pour tout $j = 1, \dots, n$:

$$\partial_j(\eta u) = (\partial_j \eta)u + \eta(\partial_j u).$$

De la même manière, puisque $\partial_j \eta$ est bornée, on obtient pour tout $j = 1, \dots, n$:

$$\|\partial_j(\eta u_k) - \partial_j(\eta u)\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Donc ηu est la limite d'une suite de fonctions de $\mathcal{C}_0^1(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|G(x)| \le |G(0)| + |x|\,\|G'\|_{L^\infty}$. Donc $|G\circ u| \le |u|\,\|G'\|_{L^\infty} + |G(0)|$ donc, comme Ω est borné, si $u \in H^1 \subset L^2$ alors $G \circ u \in L^2$.
Si u est de classe $\mathcal{C}^1$, alors $G\circ u$ est dérivable au sens classique, de dérivées partielles :

$$\partial_j(G\circ u) = (G'\circ u)\partial_j u.$$

On suppose maintenant seulement $u \in H^1(\Omega)$. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $\mathcal{C}^1$ convergeant vers u dans $H^1(\Omega)$.
La suite $(G\circ u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans L^2 vers $G\circ u$. En effet, pour tout n :

$$|G\circ u_k - G\circ u| \le \|G'\|_{L^\infty}|u_k - u| \quad \text{et donc} \quad \|G\circ u_k - G\circ u\|_{L^2} \le \|G'\|_{L^\infty}\|u_k - u\|_{L^2}.$$

Quitte à extraire, on peut supposer que u_k converge simplement vers u presque partout (propriété de L^2). Alors, $(G'\circ u_k)\partial_j u_k$ converge dans L^2 vers $(G'\circ u)\partial_j u$. En effet :

$$\begin{aligned}\left\|(G'\circ u_k)\partial_j u_k - (G'\circ u)\partial_j u\right\|_{L^2} &\le \|(G'\circ u_k)(\partial_j u_k - \partial_j u)\|_{L^2} + \|\partial_j u(G'\circ u_k - G'\circ u)\|_{L^2}\\ &\le \|G'\|_{L^\infty}\|\partial_j u_k - \partial_j u\|_{L^2} + \|\partial_j u(G'\circ u_k - G'\circ u)\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Puisque G' est continue, $G' \circ u_k - G' \circ u$ converge simplement vers 0 presque partout. Par le théorème de convergence dominée, on a alors $\|\partial_j u(G' \circ u_k - G' \circ u)\|_{L^2} \to 0$. Cela implique que

$$\big\|(G' \circ u_k)\partial_j u_k - (G' \circ u)\partial_j u\big\|_{L^2} \to 0.$$

Donc $G \circ u_k$ converge dans H^1 (c'est une suite de Cauchy dont toutes les dérivées partielles forment une suite de Cauchy). Sa limite est $G \circ u$ (puisque les limites dans L^2 et H^1 coïncident, si les deux existent). Donc $G \circ u \in H^1$ et, pour tout j :

$$\partial_j(G \circ u) = \lim_{n \to +\infty} \partial_j(G \circ u_k) = \lim_{n \to +\infty} (G' \circ u_k)\partial_j u_k = (G' \circ u)\partial_j u.$$

Exercice 3 : inégalité de Caccioppoli pour les sous-solutions

1. a) Soit u une sous-solution faible positive de $Lu = 0$ dans B_r. On a :

$$\int_{B_r} A\nabla u \cdot \nabla \varphi \leq 0, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{C}_0^1(B_r),\ \varphi \geq 0.$$

Par densité de $\mathcal{C}_0^1(B_r)$ dans $H_0^1(B_r)$, on en déduit :

$$\int_{B_r} A\nabla u \cdot \nabla \varphi \leq 0, \quad \forall\, \varphi \in H_0^1(B_r),\ \varphi \geq 0.$$

On a aussi $\psi^2 \in \mathcal{C}_0^1(B_r)$ et $u \in H^1(B_r)$ donc d'après la question 2. de l'exercice 2, on a $\psi^2 u \in H_0^1(B_r)$ que l'on peut donc utiliser comme fonction test. D'après la question 1. de l'exercice 2, on a :

$$\nabla(\psi^2 u) = \psi\nabla(\psi u) + (\psi u)\nabla\psi \quad \text{et} \quad \nabla(\psi u) = \psi\nabla u + u\nabla\psi$$

puisque ψu, $u \in H^1(B_r)$ et $\psi \in \mathcal{C}_0^1(B_r)$. Donc

$$\begin{aligned}
\int_{B_r} A\nabla u \cdot \nabla(\psi^2 u) &= \int_{B_r} A\nabla u \cdot \nabla(\psi u)\psi + \int_{B_r} A\nabla u \cdot \nabla\psi(\psi u) \\
&= \int_{B_r} A\nabla(\psi u) \cdot \nabla(\psi u) - \int_{B_r} A\nabla\psi \cdot \nabla(\psi u)u + \int_{B_r} A\nabla u \cdot \nabla\psi(\psi u) \\
&= \int_{B_r} A\nabla(\psi u) \cdot \nabla(\psi u) - \int_{B_r} A\nabla\psi \cdot \nabla\psi\, u^2 - \int_{B_r} A\nabla\psi \cdot \nabla u(\psi u) + \int_{B_r} A\nabla u \cdot \nabla\psi(\psi u) \\
&= \int_{B_r} A\nabla(\psi u) \cdot \nabla(\psi u) - \int_{B_r} A\nabla\psi \cdot \nabla\psi u^2 \leq 0
\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que A est symétrique pour obtenir la dernière égalité. On utilise maintenant les hypothèses faites sur A qui impliquent que

$$\int_{B_r} A\nabla(\psi u) \cdot \nabla(\psi u) \geq \lambda \int_{B_r} |\nabla(\psi u)|^2$$

et

$$\int_{B_r} A\nabla\psi \cdot \nabla\psi u^2 \leq n^2 \Lambda \|\nabla\psi\|_{L^\infty}^2 \int_{\text{supp }\psi} u^2.$$

On obtient donc

$$\lambda \int_{B_r} |\nabla(\psi u)|^2 - n^2 \Lambda \|\nabla \psi\|_{L^\infty}^2 \int_{\text{supp } \psi} u^2 \leq 0,$$

ce qui donne le résultat souhaité.
b) Soit $\rho \in]0, r[$ tel que $\bar{\omega} \subset B_\rho$. On choisit une fonction de troncature $\psi \in \mathcal{C}_0^1(B_r)$ telle que $\psi = 1$ sur B_ρ. On a alors

$$\int_{B_\rho} |\nabla(\psi u)|^2 = \int_{B_\rho} |(\nabla \psi) u + (\nabla u) \psi|^2 = \int_{B_\rho} |\nabla u|^2 \psi^2 \geq \int_\omega |\nabla u|^2$$

et en utilisant la question précédente sur B_ρ

$$\int_{B_\rho} |\nabla(\psi u)|^2 \leq C \|\nabla \psi\|_{L^\infty}^2 \int_{\text{supp } \psi} u^2 \leq C \|\nabla \psi\|_{L^\infty}^2 \int_{B_r} u^2,$$

ce qui permet de conclure.
2. a) La question 3. de l'exercice 2 nous assure que $\Phi(u) \in H^1(B_r)$ et on a :

$$\nabla \Phi(u) = \Phi'(u) \nabla u.$$

Toujours d'après la question 3. de l'exercice 2, on a $\Phi'(u) \in H^1(B_r)$ et

$$\nabla \Phi'(u) = \Phi''(u) \nabla u.$$

Considérons $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(B_r)$ positive. On veut montrer que

$$\int_{B_r} A \nabla \Phi(u) \cdot \nabla \varphi \leq 0.$$

D'après les égalités rappelées précédemment,

$$\int_{B_r} A \nabla \Phi(u) \cdot \nabla \varphi = \int_{B_r} A \nabla u \cdot \nabla \varphi \, \Phi'(u) = \int_{B_r} A \nabla u \cdot \nabla(\varphi \, \Phi'(u)) - \int_{B_r} A \nabla u \cdot \nabla u \, \varphi \, \Phi''(u).$$

On obtient facilement que

$$\int_{B_r} A \nabla u \cdot \nabla u \, \varphi \, \Phi''(u) \geq 0$$

par convexité de Φ et aussi grâce à l'hypothèse d'ellipticité sur A qui implique que

$$A \nabla u \cdot \nabla u \geq 0.$$

Montrons maintenant que le premier terme dans le membre de droite est négatif. D'après la question 3. de l'exercice 2, on a $\Phi'(u) \in H^1(B_r)$. De plus $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(B_r)$, on a donc d'après la question 2. de l'exercice 2 que $\varphi \, \Phi'(u) \in H_0^1(B_r)$. On a $\varphi \, \Phi'(u) \geq 0$ car $\varphi \geq 0$ et on a supposé Φ croissante. On avait remarqué à la première question que

$$\int_{B_r} A \nabla u \cdot \nabla \psi \leq 0, \quad \forall \, \psi \in H_0^1(B_1), \; \psi \geq 0.$$

On en déduit que

$$\int_{B_r} A\nabla u \cdot \nabla(\varphi\, \Phi'(u)) \leq 0,$$

ce qui permet de conclure.

b) On note Φ la fonction partie positive. Soit $P(x) = x^3 - x^4/2$. On introduit la suite de fonctions positives $(\Phi_k)_{k\geq 1}$ définies par

$$\Phi_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0, \\ \frac{1}{k} P(kx) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{k}, \\ x - \frac{1}{2k} & \text{si} \quad x \geq \frac{1}{k}. \end{cases}$$

On peut vérifier que $(\Phi_k)_{k\geq 1}$ est une suite de fonctions positives convergeant simplement vers Φ telle que pour tout k, Φ_k est convexe, croissante, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Comme $u_+ = \Phi(u) \in L^2(B_r)$ puisque $u \in L^2(B_r)$ et que $0 \leq \Phi_k \leq \Phi$, par le théorème de convergence dominée, on obtient que $\Phi_k(u)$ converge vers $\Phi(u)$ dans $L^2(B_r)$. D'après la question 2.a), pour tout $k \geq 1$, la fonction $\Phi_k(u)$ est une sous-solution faible positive de $Lu = 0$ sur B_r. Donc d'après la question 1.b),

$$\int_\omega |\nabla \Phi_k(u)|^2 \leq C \int_{B_r} \Phi_k(u)^2 \leq C \int_{B_r} \Phi(u)^2.$$

Ainsi, la suite $(\Phi_k(u))_{k\geq 1}$ est bornée dans $H^1(\omega)$ qui est un espace de Hilbert. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite $(\Phi_k(u))_{k\geq 1}$ converge faiblement dans $H^1(\omega)$. Par unicité de la limite, on en déduit que $u_+ = \Phi(u)$ appartient à $H^1(\omega)$. De plus, la notion de sous-solution est clairement stable par passage à la limite faible. Donc $u_+ = \Phi(u)$ est une sous-solution faible positive de $Lu = 0$ dans ω.

[Remarque : grâce à la méthode utilisée précédemment, on peut montrer un résultat plus général que le précédent. Le résultat de la question 2.b) est en fait vrai pour toute fonction Φ positive, convexe et croissante, pas seulement pour la fonction partie positive.

Pour le cas de la fonction partie positive, on peut en fait montrer un résultat plus fort : si $u \in H^1(B_r)$, alors on a $u_+ \in H^1(B_r)$ et $\nabla u_+ = (\nabla u)\mathbb{1}_{u>0}$ presque partout. Montrons ce résultat.

On considère la suite de fonctions $(\Phi_k)_{k\geq 1}$ introduite à la question 2.b). Cette suite converge simplement vers la fonction partie positive. De plus, pour tout k, $\Phi_k(0) = 0$, $\Phi_k \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et Φ_k' est bornée (par 1). Donc on peut appliquer la question 3. de l'exercice 2 qui nous dit que pour tout k, la fonction $\Phi_k(u) \in H^1(B_r)$ et pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(B_r)$, on a :

$$\int_{B_r} \Phi_k(u)\nabla\varphi = -\int_{B_r} \nabla\Phi_k(u)\varphi = -\int_{B_r} \Phi_k'(u)(\nabla u)\,\varphi.$$

Ensuite, on remarque que par convergence dominée, puisque pour tout k, $0 \leq \Phi_k(u) \leq u_+$ et que $u \in L^2(B_r)$ implique clairement que $u_+ \in L^2(B_r)$, on a :

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{B_r} \Phi_k(u)\nabla\varphi = \int_{B_r} u_+\nabla\varphi.$$

De plus la suite de fonctions $(\Phi_k')_{k\geq 1}$ converge simplement vers $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_*^+}$ et est bornée par 1. Donc $|\Phi_k'(u)(\nabla u)| \leq |\nabla u|$. Puisque $u \in H^1(B_r)$, on en déduit qu'on peut également utiliser un argument de convergence dominée pour montrer que

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{B_r} \Phi_k'(u)(\nabla u)\,\varphi = \int_{B_r} \mathbb{1}_{u>0}(\nabla u)\,\varphi.$$

Pour conclure, le fait que $u \in H^1(B_r)$ implique que $\mathbb{1}_{u>0}(\nabla u) \in L^2(B_r)$ donc on a bien montré que $u_+ \in H^1(B_r)$ et $\nabla u_+ = (\nabla u)\mathbb{1}_{u>0}$ presque partout. De la même manière, on déduit que u_+ est une sous-solution faible positive de $Lu = 0$ sur B_r. En effet, on a par convergence dominée :

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{B_r} A\nabla\Phi_k(u) \cdot \nabla\varphi = \int_{B_r} A\nabla u_+ \cdot \nabla\varphi.$$

Puis on conclut en appliquant la question 2.a) à la fonction Φ_k pour tout k.]

Exercice 4 : estimation $L^2 - L^\infty$

1. a) Premièrement, on remarque que si u est une solution faible de $Lu = 0$ sur B_1, alors $u - C_{k+1}$ l'est aussi. On a ensuite que $u_{k+1} = (u - C_{k+1})_+$ est une sous-solution faible de $Lu = 0$ sur la boule $\tilde{B}_k$ qui est strictement incluse dans B_1 en appliquant la question 2.b) de l'exercice 3.
b) Quitte à prolonger nos fonctions par 0 en dehors de B_1, on peut supposer qu'elles sont définies sur $\mathbb{R}^n$ et on peut ainsi appliquer le résultat de la question 4. de l'exercice 1 avec $s = 1$ et $f = \phi_{k+1}u_{k+1}$, ce qui donne :

$$\left(\int (\phi_{k+1}u_{k+1})^p \, dx\right)^{2/p} \leq c_1 \int |\nabla(\phi_{k+1}u_{k+1})|^2 \, dx$$

pour une constante $c_1 > 0$.
On applique ensuite le résultat de la question 1.a) de l'exercice 3 : d'après la question précédente, u_{k+1} est sous-solution sur $\tilde{B}_k$ et $\phi_{k+1} \in \mathcal{C}_0^1(\tilde{B}_k)$. On en déduit donc :

$$\int |\nabla(\phi_{k+1}u_{k+1})|^2 \, dx = \int_{\tilde{B}_k} |\nabla(\phi_{k+1}u_{k+1})|^2 \, dx \leq c_2 c_0^2 2^{2(k+1)} \int_{\mathrm{supp}(\phi_{k+1})} |u_{k+1}|^2 \, dx$$

pour une certaine constante $c_2 > 0$. De plus,

$$\mathbb{1}_{\mathrm{supp}(\phi_{k+1})} \leq \mathbb{1}_{\tilde{B}_k} \quad \text{et} \quad u_{k+1} \leq u_k.$$

La première inégalité est claire. Pour la deuxième, si $u \leq C_{k+1}$, l'inégalité est évidente. Et si $u \geq C_{k+1}$, alors $u \geq C_k$ et $u_{k+1} = u - C_{k+1} \leq u - C_k = u_k$. Donc pour tout $k \geq 1$,

$$\left(\int (\phi_{k+1}u_{k+1})^p \, dx\right)^{2/p} \leq c_1 c_2 c_0^2 2^{2(k+1)} \int_{\tilde{B}_k} |u_k|^2 \, dx \leq C^k U_k$$

pour une certaine constante $C > 1$.
c) Remarquons qu'on a $\mathbb{1}_{\tilde{B}_{k+1}} \leq \phi_{k+1}$. On utilise l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned} U_{k+1} &\leq \int (\phi_{k+1}u_{k+1})^2 \, dx = \int (\phi_{k+1}u_{k+1})^2 \, \mathbb{1}_{|\{\phi_{k+1}u_{k+1}>0\}|} \, dx \\ &\leq \left(\int (\phi_{k+1}u_{k+1})^p \, dx\right)^{2/p} |\{\phi_{k+1}u_{k+1} > 0\}|^{2/n}. \end{aligned}$$

De plus, $\phi_{k+1}u_{k+1} > 0$ implique $\phi_{k+1} > 0$ et $u_{k+1} > 0$. D'une part, on remarque que si $\phi_{k+1}(x) > 0$ alors $x \in \tilde{B}_k$ et donc $\mathbb{1}_{\tilde{B}_k}(x) = 1$. D'autre part, $u_{k+1} > 0$ implique que $u_{k+1} = u - C_{k+1}$ et $u_k = u - C_k$

puisque $C_{k+1} \geq C_k$. On en déduit alors également que $u_k - u_{k+1} = -C_k + C_{k+1} = 2^{-k-2}$. Finalement, on en déduit

$$\phi_{k+1}(x)u_{k+1}(x) > 0 \Rightarrow \mathbb{1}_{\tilde{B}_k}(x)u_k(x) - 2^{-k-2} = u_k(x) - 2^{-k-2} = u_{k+1}(x) > 0.$$

D'où en utilisant la question 1.b),

$$\begin{aligned} U_{k+1} &\leq \left(\int (\phi_{k+1}u_{k+1})^p \, dx\right)^{2/p} |\{\mathbb{1}_{\tilde{B}_k}u_k > 2^{-k-2}\}|^{2/n} \\ &\leq C^k U_k |\{(\mathbb{1}_{\tilde{B}_k}u_k)^2 > 2^{-2(k-2)}\}|^{2/n}. \end{aligned}$$

On utilise enfin l'inégalité de Markov et on suppose $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} |\{(\mathbb{1}_{\tilde{B}_k}u_k)^2 > 2^{-2(k+2)}\}|^{2/n} &\leq \left(2^{2(k+2)} \int (\mathbb{1}_{\tilde{B}_k}u_k)^2 \, dx\right)^{2/n} \\ &\leq \left(2^{2(k+2)} \int (\mathbb{1}_{\tilde{B}_k}u_k)^2 \, dx\right)^{2/n} \leq 2^{8k/n} U_k^{2/n}. \end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$U_{k+1} \leq C^k 2^{8k/n} U_k^{1+2/n} \leq (2^{8/n}C)^k U_k^{1+2/n}$$

ce qui donne le résultat voulu avec $\beta = 1 + 2/n$.

2. On considère $k_0 \geq 2$ tel que $2^{-k_0} \leq 1/(2C)^{1/(\beta-1)}$. Ce k_0 étant fixé, on peut choisir $U_0 \leq 1$ tel que pour tout $k \leq k_0$, on ait

$$C^k U_k^{\beta-1} \leq \frac{1}{(2C)^{\frac{1}{\beta-1}}}.$$

Montrons maintenant par récurrence que cette inégalité est encore vraie pour $k \geq k_0$. On fixe $k > k_0$ et on suppose que l'inégalité est vraie pour tout $j \leq k$. Alors d'après la question 1.c) et l'hypothèse de récurrence, on a :

$$U_{k+1} \leq C^k U_k^\beta = C^k U_k^{\beta-1} U_k \leq \frac{1}{(2C)^{\frac{1}{\beta-1}}} U_k \leq \dots \leq \frac{1}{(2C)^{\frac{k+1}{\beta-1}}} U_0 \leq \frac{1}{(2C)^{\frac{k+1}{\beta-1}}}$$

et donc

$$C^{k+1} U_{k+1}^{\beta-1} \leq 2^{-(k+1)} \leq \frac{1}{(2C)^{\frac{1}{\beta-1}}}.$$

3. On déduit de la question 2. qu'on a une inégalité de la forme

$$U_k^{\beta-1} \leq \frac{1}{(2C)^{\frac{1}{\beta-1}}} \left(\frac{1}{C}\right)^k$$

avec $C > 1$. Par comparaison avec une suite géométrique, on en déduit que $U_k \to 0$ à l'infini. Mais on a également $U_k \to \int_{B_{1/2}} (u - 1/2)_+^2 \, dx$ d'où $(u - 1/2)_+^2 = 0$ p.p. sur $B_{1/2}$, d'où $\|u\|_{L^\infty(B_{1/2})} \leq 1/2$.