Corrigé n°8

Exercice 1 : lemme des valeurs intermédiaires

1. Soit $x \in D$. Alors, on a

$$1 \leq \bar{u}(x) - \bar{u}(x_0) = \int_0^1 \nabla \bar{u}((1-t)x_0 + tx) \cdot (x - x_0)\, dt.$$

En intégrant en $x \in D$ cette inégalité, on obtient :

$$\begin{aligned} |D| &\leq \int_D \int_0^1 |\nabla \bar{u}((1-t)x_0 + tx)||x - x_0|\, dt\, dx \\ &\leq \int_{B_1} \int_0^1 |\nabla \bar{u}((1-t)x_0 + tx)||x - x_0|\, dt\, dx. \end{aligned}$$

2. On fait le changement de variable $s = t|x - x_0|$ et on note $e(x) = (x - x_0)/|x - x_0|$, on obtient :

$$|D| \leq \int_{B_1} \int_0^{|x-x_0|} |\nabla \bar{u}|(x_0 + se(x))\, ds\, dx.$$

On prolonge $|\nabla \bar{u}|$ par 0 en dehors de B_1 et on note encore $|\nabla \bar{u}|$ ce prolongement. On peut alors écrire :

$$|D| \leq \int_{B_1} \int_0^{\infty} |\nabla \bar{u}|(x_0 + se(x))\, ds\, dx.$$

On passe en coordonnées polaires pour $x - x_0$ dans la dernière intégrale :

$$\begin{aligned} |D| &\leq \int_0^2 r^{n-1} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\int_0^{\infty} |\nabla \bar{u}|(x_0 + se)\, ds \right) de\, dr \\ &\leq \frac{2^n}{n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\int_0^{\infty} |\nabla \bar{u}|(x_0 + se)\, ds \right) de. \end{aligned}$$

On fait maintenant le changement de variables inverse en utilisant que $|\nabla \bar{u}|$ est nul en dehors de B_1 :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\int_0^{\infty} |\nabla \bar{u}|(x_0 + se)\, ds \right) de &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^{\infty} s^{n-1} \frac{|\nabla \bar{u}|(x_0 + se)}{s^{n-1}}\, ds\, de \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla \bar{u}|(x_0 + x)}{|x|^{n-1}}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla \bar{u}|(y)}{|x_0 - y|^{n-1}}\, dy = \int_{B_1} \frac{|\nabla \bar{u}|(y)}{|x_0 - y|^{n-1}}\, dy, \end{aligned}$$

d'où

$$|D| \leq c_n \int_{B_1} \frac{|\nabla \bar{u}(y)|}{|x_0 - y|^{n-1}} dy, \quad c_n = \frac{2^n}{n}.$$

Finalement, en intégrant en $x_0 \in A$ cette inégalité, on obtient

$$|A||D| \leq c_n \int_{B_1} |\nabla \bar{u}|(y) \left(\int_A \frac{dx}{|x - y|^{n-1}} \right) dy.$$

3. Soient $x \in B_1$ et $E \subset B_1$. On note ω_n la surface de la sphère unité de $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. On introduit le réel $r_0 > 0$ qui est tel que $\omega_n \frac{r_0^n}{n} = |B(x, r_0)| = |E|$. On a :

$$\int_E \frac{dy}{|x-y|^{n-1}} \leq \int_{B(x,r_0)} \frac{dy}{|x-y|^{n-1}}.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\int_E \frac{dy}{|x-y|^{n-1}} &= \int_{E \setminus B(x,r_0)} \frac{dy}{|x-y|^{n-1}} + \int_{E \cap B(x,r_0)} \frac{dy}{|x-y|^{n-1}} \\
&\leq \frac{1}{r_0^{n-1}} \int_{E \setminus B(x,r_0)} dy + \int_{E \cap B(x,r_0)} \frac{dy}{|x-y|^{n-1}} \\
&= \frac{1}{r_0^{n-1}} \int_{B(x,r_0) \setminus E} dy + \int_{E \cap B(x,r_0)} \frac{dy}{|x-y|^{n-1}} \\
&\leq \int_{B(x,r_0) \setminus E} \frac{dy}{|x-y|^{n-1}} + \int_{E \cap B(x,r_0)} \frac{dy}{|x-y|^{n-1}} \\
&= \int_{B(x,r_0)} \frac{dy}{|x-y|^{n-1}}
\end{aligned}$$

où on a utilisé que E et $B(x, r_0)$ ont le même volume pour l'égalité de la troisième ligne. On conclut en passant en coordonnées polaires

$$\int_{B(x,r_0)} \frac{dy}{|x-y|^{n-1}} = \int_{B(0,r_0)} \frac{dy}{|y|^{n-1}} = \omega_n r_0.$$

On a donc :

$$\int_E \frac{dy}{|x-y|^{n-1}} \leq \omega_n r_0 \leq |E|^{1/n} n^{1/n} \omega_n^{1-1/n}.$$

4. En utilisant les résultats précédents, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que $\nabla \bar{u} = (\nabla u)\, \mathbb{1}_C$, on obtient :

$$\begin{aligned}
|A||D| &\leq c_n \left(\int_{B_1} |\nabla u|^2 \right)^{1/2} \left(\int_C \left(\int_A \frac{dx}{|x-y|^{n-1}} \right)^2 dy \right)^{1/2} \\
&\leq c_n c_0^{1/2} c_n' |A|^{1/n} |C|^{1/2}.
\end{aligned}$$

D'où

$$c_0^{1/2} |C|^{1/2} \geq \frac{1}{c_n c_n'} |A|^{1-1/n} |D|.$$

Exercice 2 : lemme d'oscillation et théorème de De Giorgi

1. a) D'après les questions 1.b) et 2.b) de l'exercice 3 du TD 7, on peut appliquer l'inégalité de Caccioppoli pour les sous-solutions. Puisque v_k est une sous-solution positive de $Lu = 0$ sur $B_{3/2}$ et $0 \leq v_k \leq 1$:

$$\int_{B_1} |\nabla v_k|^2 \leq c^2 \int_{B_{3/2}} |v_k|^2 \leq c^2 |B_{3/2}|.$$

b) On suit l'indication et on commence par montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$C_k \subset \{x \in B_1 \text{ tq } v_k(x) > 0, v_{k+1}(x) = 0\}.$$

Soit donc $x \in C_k$, on a $0 < w_k(x) < 1$, donc $0 < v_k(x) < 1/2$ et donc $0 < v(x) - (1 - 2^{-k}) < 2^{-k-1}$. On a alors $1 - 2^{-k} < v(x) < 1 - 2^{-(k+1)}$. Donc $v_k(x) > 0$ mais $v_{k+1}(x) = 0$.

Appliquons le résultat de l'exercice 1 à la fonction w_k. Ce résultat dit qu'il existe une constante β, qui dépend seulement de c_0 et de la dimension n (en particulier, qui ne dépend pas de k) telle que :

$$|A_k|\,|D_k| \leq \beta |C_k|^{1/2}.$$

On a utilisé pour simplifier l'inégalité de l'exercice 1 le fait que $|A_k|^{1/n} \leq |B_1|^{1/n}$ et on a intégré dans la constante le terme $|B_1|^{1/n}$.

De plus, $|A_k| \geq \mu$ puisque, si $v = 0$, alors $v_k = 0$ et donc $w_k = 0$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
|\{x \in B_1 \text{ tq } v_k(x) > 0, v_{k+1}(x) = 0\}| &\geq |C_k| \\
&\geq \frac{1}{\beta^2}|A_k|^2|D_k|^2 \\
&\geq \frac{\mu^2}{\beta^2}|D_k|^2 \\
&= \frac{\mu^2}{\beta^2}|\{x \in B_1 \text{ tq } w_k(x) = 1\}|^2 \\
&\geq \frac{\mu^2}{\beta^2}|\{x \in B_1 \text{ tq } v_{k+1}(x) > 0\}|^2
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité vient du fait que si $v_{k+1}(x) > 0$, alors $v(x) > 1 - 2^{-(k+1)}$ donc $v_k(x) > 1/2$ et $w_k(x) = 1$.

c) La suite $(|\{x \in B_1 \text{ tq } v_k(x) > 0\}|)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante, à cause de la définition de v_k.

Soit δ quelconque. Soit k_1 qui est tel que :

$$|\{x \in B_1 \text{ tq } v_{k_1}(x) > 0\}| > \delta.$$

D'après la propriété de décroissance et d'après la question précédente, on a, pour tout $k < k_1$:

$$|\{x \in B_1 \text{ tq } v_k(x) > 0, v_{k+1}(x) = 0\}| \geq \frac{\mu^2}{\beta^2}\delta^2.$$

Les ensembles $\{x \in B_1 \text{ tq } v_k(x) > 0, v_{k+1}(x) = 0\}$ sont disjoints donc :

$$\begin{aligned}
|B_1| &\geq \sum_{k=0}^{k_1-1} |\{x \in B_1 \text{ tq } v_k(x) > 0, v_{k+1}(x) = 0\}| \\
&\geq \frac{\mu^2}{\beta^2}k_1\delta^2.
\end{aligned}$$

Ainsi, $k_1 \leq \frac{\beta^2}{\mu^2}\delta^{-2}|B_1|$.

Si on prend $k_0 > \frac{\beta^2}{\mu^2}\delta^{-2}|B_1|$, la propriété voulue est donc vérifiée.
d) Supposons $\delta > 0$ fixé. Nous indiquerons après comment le choisir. Soit k_0 comme à la question précédente.
On a :

$$\int_{B_1} v_{k_0}^2 \leq \delta$$

car $v_{k_0}^2 \leq 1$ donc en utilisant l'estimation $L^2 - L^\infty$ rappelée dans l'énoncé, on a pour une certaine constante c indépendante de v et de δ :

$$\sup_{B_{1/2}} v_{k_0} \leq c\,\delta^{1/2}.$$

Choisissons δ de sorte que $c\delta^{1/2} < 1$. Alors, pour tout $x \in B_{1/2}$:

$$v_{k_0}(x) \leq c\,\delta^{1/2} \quad \text{et donc} \quad v(x) \leq 1 - (1 - c\,\delta^{1/2})2^{-k_0}.$$

En posant $\eta = 1 - (1 - c\,\delta^{1/2})2^{-k_0}$, on a le résultat voulu.
2. On commence par prouver le lemme dans le cas où $x_0 = 0$ et $r = 1/2$. D'après la question précédente, si v est une sous-solution de $Lv = 0$, définie sur B_2, telle que $0 \leq v \leq 1$ sur $B_{3/2}$ et $|B_1 \cap v^{-1}(\{0\})| = \mu > 0$, alors $0 \leq v \leq \eta$ sur $B_{1/2}$, avec $\eta < 1$ ne dépendant que de μ, de n, de λ et de Λ.
Soit maintenant $u \in H^1(B_2)$ une solution de $Lu = 0$.
Par l'estimation $L^2 - L^\infty$, u est bornée sur $B_{3/2}$ (on utilise que u_+ et $-u_-$ sont des sous-solutions positives). Notons $m = \inf_{B_{3/2}} u$ et $M = \sup_{B_{3/2}} u$. Posons

$$v_+ = \max(0, 2(u-m)/(M-m) - 1) \quad \text{et} \quad v_- = \max(0, 1 - 2(u-m)/(M-m)).$$

Ce sont deux sous-solutions sur B_2. On a $0 \leq v_+, v_- \leq 1$ sur $B_{3/2}$. De plus,

$$|\{x \in B_1 \text{ tq } v_+(x) \leq 0\}| + |\{x \in B_1 \text{ tq } v_-(x) \leq 0\}| \geq |B_1|.$$

On a donc :

$$|\{x \in B_1 \text{ tq } v_+(x) \leq 0\}| \geq |B_1|/2 \quad \text{ou} \quad |\{x \in B_1 \text{ tq } v_-(x) \leq 0\}| \geq |B_1|/2.$$

Supposons par exemple que la première inégalité est vérifiée.
On a alors, d'après le résultat démontré à la question précédente appliqué pour

$$\mu = |\{x \in B_1 \,\text{tq}\, v_+(x) \leq 0\}| \geq |B_1|/2 > 0,$$

que $0 \leq v_+ \leq \eta$ sur $B_{1/2}$, avec η ne dépendant que de n, de λ et de Λ. Ainsi, sur $B_{1/2}$:

$$m \leq u = (v_+ - v_-)\frac{M-m}{2} + \frac{M+m}{2} \leq \eta\frac{M-m}{2} + \frac{M+m}{2} \quad \text{et donc} \quad \sup_{B_{1/2}} u - \inf_{B_{1/2}} u \leq \theta(M-m)$$

si on pose $\theta = \frac{1+\eta}{2} < 1$.
On a donc démontré le lemme pour $x_0 = 0$ et $r = 1/2$.

Comme θ ne dépend que de la dimension, de λ et de Λ, le résultat est stable par translation et dilatation (par dilatation, on entend le fait de considérer la fonction $u_\beta = u(\beta.)$, pour $\beta > 0$, qui est une solution de $L_\beta u_\beta = 0$ pour $L_\beta v = \sum_{i,j} \partial_i(a_{ij}(\beta x)\partial_j v))$. Donc le lemme est vrai pour tous x_0 et r.
3. Soit θ donné par la question 2. Fixons $r \in]0; 1/2]$. Pour tout $x_0 \in B_1$, on a, en appliquant récursivement le lemme :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \sup_{B(x_0, 2^{-k}r)} u - \inf_{B(x_0,2^{-k}r)} u \leq \theta^k \left(\sup_{B(x_0,r)} u - \inf_{B(x_0,r)} u \right).$$

D'après l'estimation $L^2 - L^\infty$, on a :

$$\sup_{B(x_0,r)} u \leq \sup_{B(x_0,r)} \max(0,u) \leq \sup_{B_{3/2}} \max(0,u) \leq c\|u\|_{L^2(B_2)}.$$

De même, en utilisant $-\inf_{B(x_0,r)} u = \sup_{B(x_0,r)}(-u)$, on a $\inf_{B(x_0,r)} u \geq -c\|u\|_{L^2(B_2)}$. On a donc, pour tous $x_0 \in B_1, r \in]0; 1/2], k \in \mathbb{N}$:

$$\sup_{B(x_0,2^{-k}r)} u - \inf_{B(x_0,2^{-k}r)} u \leq 2c\theta^k \|u\|_{L^2(B_2)}.$$

Pour tous $x, y \in B_1$, si $|x-y| < r$:

$$|u(x) - u(y)| \leq \sup_{B(x,2^{-k}r)} u - \inf_{B(x,2^{-k}r)} u \leq 2c\theta^k \|u\|_{L^2(B_2)}$$

pour $k = \left[\log_2 \frac{r}{|x-y|}\right]$. Comme $k \geq \log_2 r - \log_2 |x-y| - 1$ et $\log\theta < 0$, on en déduit :

$$|u(x) - u(y)| \leq 2c \exp\left(\log\theta\left(\log_2 r - \log_2|x-y| - 1\right)\right) \|u\|_{L^2(B_2)} \leq C|x-y|^\alpha \|u\|_{L^2(B_2)}$$

pour $\alpha = -\log_2\theta > 0$ et C indépendante de u.
Comme on a vu que $\sup_{B_1} |u| \leq c\|u\|_{L^2(B_2)}$, l'inégalité est également valable pour $|x-y| \geq r$, quitte à modifier la valeur de C. Cela montre donc que u est α-höldérienne, pour une valeur de α indépendante de u.

Exercice 3 : inégalité de Harnack faible et régularité Hölderienne

1. Si $\operatorname{osc}_{B_2} u = 0$, c'est terminé. Sinon, on pose

$$v = \frac{u}{\operatorname*{osc}_{B_2} u + \frac{\|f\|_{L^n(B_2)}}{\varepsilon_0}}$$

pour un certain $\varepsilon_0 > 0$ à déterminer. Pour alléger les notations, on note

$$K = \operatorname*{osc}_{B_2} u + \frac{\|f\|_{L^n(B_2)}}{\varepsilon_0}.$$

La fonction v est alors sur-solution positive de

$$\mathcal{P}^+(D^2 v) + \frac{|f|}{K} = 0 \quad \text{dans} \quad B_2.$$

Comme $\mathrm{osc}_{B_2} v \leq 1$, il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $0 \leq v - c \leq 1$ sur B_2. On pose ensuite $w = v - c$ et w est aussi sur-solution positive de

$$\mathcal{P}^+(D^2 w) + \frac{|f|}{K} = 0 \quad \text{dans} \quad B_2.$$

On en déduit qu'il existe des constantes universelles $\varepsilon' > 0$ et $C' > 0$ telles que

$$\left(\int_{B_1} w^{\varepsilon'} \right)^{1/\varepsilon'} \leq C' \left(\inf_{B_1} w + \frac{\|f\|_{L^n(B_2)}}{K} \right).$$

On remarque que $\|f\|_{L^n(B_2)}/K \leq \varepsilon_0$ et donc

$$\left(\int_{B_1} w^{\varepsilon'} \right)^{1/\varepsilon'} \leq C' \left(\inf_{B_1} w + \varepsilon_0 \right).$$

Puisque $0 \leq w \leq 1$, on a $|\{w \geq 1/2\} \cap B_1| \geq |B_1|/2$ ou $|\{w \leq 1/2\} \cap B_1| \geq |B_1|/2$. Supposons qu'on est dans le premier cas c'est-à-dire que $|\{w \geq 1/2\} \cap B_1| \geq |B_1|/2$. On a :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{|B_1|}{2} \right)^{1/\varepsilon'} \leq \frac{1}{2} |\{w \geq 1/2\} \cap B_1|^{1/\varepsilon'} \leq \left(\int_{B_1} \mathbb{1}_{w \geq 1/2} \, w^{\varepsilon'} \right)^{1/\varepsilon'} \leq \left(\int_{B_1} w^{\varepsilon'} \right)^{1/\varepsilon'}.$$

Donc par l'inégalité de Harnack faible, on en déduit :

$$\tilde{C} = \frac{1}{2} \left(\frac{|B_1|}{2} \right)^{1/\varepsilon'} \leq C' \left(\inf_{B_1} w + \varepsilon_0 \right).$$

Quitte à augmenter la valeur de C', on peut supposer que $C' > \tilde{C}/2$. En posant dès le début de la preuve $\varepsilon_0 = \tilde{C}/(2C')$ (qui est bien une constante universelle), on obtient

$$\inf_{B_1} w \geq \frac{\tilde{C}}{2C'} > 0.$$

On pose ensuite $\theta = 1 - \tilde{C}/(2C')$ et on obtient :

$$\operatorname*{osc}_{B_1} v = \operatorname*{osc}_{B_1} w = \sup_{B_1} w - \inf_{B_1} w \leq 1 - \frac{\tilde{C}}{2C'} = \theta \in]0,1[$$

i.e.

$$\operatorname*{osc}_{B_1} u \leq \theta \left(\operatorname*{osc}_{B_2} u + \frac{\|f\|_{L^n(B_2)}}{\varepsilon_0} \right).$$

Supposons maintenant qu'on est dans le deuxième cas c'est-à-dire que $|\{w \leq 1/2\} \cap B_1| \geq |B_1|/2$. On pose alors $\tilde{w} = 1 - w$ qui vérifie $|\{\tilde{w} \geq 1/2\} \cap B_1| \geq |B_1|/2$. On a aussi $\tilde{w} \geq 0$ sur B_2 puisque $0 \leq w \leq 1$. Le fait que w soit sous-solution de

$$\mathcal{P}^-(D^2 w) - \frac{|f|}{K} = 0 \quad \text{dans} \quad B_2$$

implique que $\tilde{w}$ est sur-solution de

$$\mathcal{P}^+(D^2\tilde{w}) + \frac{|f|}{K} = 0 \quad \text{dans} \quad B_2$$

où on a utilisé le fait que $\mathcal{P}^-(M) = -\mathcal{P}^+(-M)$. En faisant le même raisonnement que précédemment, on obtient

$$\operatorname*{osc}_{B_1} w = \operatorname*{osc}_{B_1} \tilde{w} \leq \theta$$

et donc

$$\operatorname*{osc}_{B_1} u \leq \theta \left(\operatorname*{osc}_{B_2} u + \frac{\|f\|_{L^n(B_2)}}{\varepsilon_0} \right).$$

2. Soient $x_0 \in B_1$ et $r \in]0,1[$. Alors, on remarque que $\bar{B}(x_0, r) \subset \bar{B}_2$. On considère la fonction v définie par

$$v(y) = u\left(x_0 + \frac{ry}{2}\right), \quad \forall\, y \in \bar{B}_2.$$

La fonction v est continue positive sur $\bar{B}_2$ et est sur-solution de

$$\mathcal{P}^+(D^2 v) + |g| = 0 \quad \text{dans} \quad B_2$$

où

$$g(y) = \frac{r^2}{4} f\left(x_0 + \frac{ry}{2}\right), \quad \forall\, y \in \bar{B}_2.$$

Alors, d'après l'inégalité de Harnack faible et la question précédente, on en déduit :

$$\operatorname*{osc}_{B_1} v \leq \theta \left(\operatorname*{osc}_{B_2} v + \frac{\|g\|_{L^n(B_2)}}{\varepsilon_0} \right).$$

On remarque que

$$\|g\|_{L^n(B_2)} = \frac{r}{2} \|f\|_{L^n(B(x_0,r))} \leq \frac{r}{2} \|f\|_{L^n(B_2)}.$$

Donc on a prouvé l'existence d'un constante $F > 0$ (qui est un $O(\|f\|_{L^n(B_2)})$ indépendant de r) telle que

$$\operatorname*{osc}_{B_1} v \leq \theta \operatorname*{osc}_{B_2} v + Fr.$$

Or

$$\operatorname*{osc}_{B_1} v = \operatorname*{osc}_{B(x_0, r/2)} u \quad \text{et} \quad \operatorname*{osc}_{B_2} v = \operatorname*{osc}_{B(x_0,r)} u.$$

Donc on a prouvé l'existence de constantes $\theta \in]0,1[$ et $F > 0$ telles que pour tout $x_0 \in B_1$ et tout $r \in (0,1)$,

$$\operatorname*{osc}_{B(x_0,r/2)} u \leq \theta \operatorname*{osc}_{B(x_0,r)} u + Fr.$$

Soit $\beta = -\ln\theta / \ln 2$. On pose $\alpha = \min(\beta/2, 1/2)$. D'après un lemme du cours, on a l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\operatorname*{osc}_{B(x_0,r)} u \leq C\, r^\alpha \left(\|u\|_{L^\infty(B_2)} + \|f\|_{L^n(B_2)} \right).$$

Toujours d'après le cours, on peut conclure que u est Hölderienne sur B_1.