TD n°1 : Équations de transport et distributions harmoniques

Dans tout le TD, n désigne un entier naturel non nul.

Exercice 1 : équation de transport linéaire avec donnée initiale non régulière

On s'intéresse à un problème de transport de type :

$$(1) \qquad \begin{cases} \partial_t u(t,x) + c \cdot \nabla_x u(t,x) = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^n \\ u(0,\cdot) = u_0 \end{cases}$$

où c est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ constant.

Lorsque $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, la solution (au sens classique) de ce problème de transport est donnée par $u(t,x) = u_0(x-ct)$. Comment donner un sens au fait que u soit solution de ce problème lorsque u_0 n'est pas régulière, voire discontinue ? Dans la suite, on supposera donc u_0 seulement bornée localement sur $\mathbb{R}^n$.

1. On dira qu'une fonction u bornée localement sur $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^n$ est une solution faible du problème (1) si pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n} u(t,x) \big[\partial_t \varphi(t,x) + c \cdot \nabla_x \varphi(t,x)\big] \, dx \, dt + \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) \varphi(0,x) \, dx = 0.$$

Montrer qu'une solution classique (lorsque $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$) est une solution faible.

2. Montrer l'unicité (au sens presque partout) d'une solution faible.

[Indication : on s'intéressera à la solution $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ du problème de transport suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \varphi(t,x) + c \cdot \nabla_x \varphi(t,x) = \psi(t,x) \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_*^+ \\ \varphi(\cdot, 0) = \varphi_0, \end{cases}$$

où $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ quelconque et φ_0 choisi convenablement.]

3. Dans le cas où $n = 1$, $c > 0$ et $u_0(x) = H(x)$ la fonction d'Heaviside, donner explicitement l'unique solution faible du problème.

Exercice 2 : une équation de transport non linéaire

Dans cet exercice, on considère une équation de transport en dimension 1 :

$$(2) \qquad \begin{cases} \partial_t u(t,x) + \frac{1}{2} \partial_x (u^2)(t,x) = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R} \\ u(0,\cdot) = u_0. \end{cases}$$

1. Dans cette question, on suppose que $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, que u_0 est bornée ainsi que sa dérivée u_0'. Le but de cette question est de montrer que (2) admet une solution de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,T[\, \times \mathbb{R}$ où

$$T = \frac{1}{\sup_{z \in \mathbb{R}} (\max(0, -u_0'(z)))}$$

avec la convention $1/0 = +\infty$.

a) Pour $s \geq 0$, on définit ϕ_s par

$$\phi_s(z) = z + s u_0(z), \quad \forall\, z \in \mathbb{R}.$$

Montrer que pour tout $s \in [0, T[$, ϕ_s est bijective de classe $\mathcal{C}^1$ ainsi que sa réciproque.
b) Montrer que l'application Φ définie par

$$\Phi(t,x) = \phi_t^{-1}(x), \quad \forall\,(t,x) \in [0,T[\,\times\mathbb{R}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,T[\,\times\mathbb{R}$.
[Indication : on pourra introduire la fonction F définie par $F(t,x,z) = z + tu_0(z) - x$.]
c) Conclure.
[Remarque : cette solution est en fait unique et cela se montre grâce à la méthode des caractéristiques qui sera vue ultérieurement.]
2. De même qu'à l'exercice 1, on définit la notion de solution faible : on dira que u bornée localement sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ est une solution faible du problème (2) si pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}} \left[u(t,x)\partial_t\varphi(t,x) + \frac{1}{2}u^2(t,x)\partial_x\varphi(t,x)\right]\,dx\,dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\varphi(0,x)\,dx = 0.$$

On suppose maintenant que $u_0 = 0$ et on définit pour $p > 0$,

$$\forall\,(t,x) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}, \quad v_p(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \le -pt, \\ -2p & \text{si} \quad -pt < x \le 0, \\ 2p & \text{si} \quad 0 < x \le pt \\ 0 & \text{si} \quad x > pt. \end{cases}$$

Vérifier que pour tout $p > 0$, v_p est une solution faible de l'équation (2).

Exercice 3 : inégalité de Caccioppoli et régularité des fonctions harmoniques
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une fonction $u \in H^1(\Omega)$ à valeurs réelles est dite harmonique si

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi = 0, \quad \forall\,\varphi \in H_0^1(\Omega).$$

1. Supposons que $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ est harmonique et considérons deux boules concentriques $B(r) \subset\subset B(R) \subset\subset \Omega$ de rayons respectivement $r > 0$ et $R > 0$ (on a noté $\subset\subset$ la stricte inclusion). Montrer que pour tout $c \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_{B(r)} |\nabla u|^2\,dx \le \frac{16}{(R-r)^2}\int_{B(R)\setminus B(r)} |u-c|^2\,dx.$$

[Indication : introduire $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ telle que $0 \le \eta \le 1$, $\eta = 1$ sur $B(r)$, $\eta = 0$ sur $\Omega/B(R)$ et $|\nabla\eta| \le 2/(R-r)$ et choisir $\varphi = (u-c)\eta^2$ comme fonction test.]
2. Considérons une boule $B(R) \subset\subset \Omega$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante $K(R,k)$ telle que pour toute $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ vérifiant $\Delta u = 0$, on a :

$$\|u\|^2_{H^k(B(R/2))} \le K(R,k)\int_{B(R)} u^2\,dx.$$

3. Montrer que si $u \in H^1(\Omega)$ est harmonique, alors $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.
[Indication : introduire une approximation de l'unité.]

Exercice 4 : inégalité de Caccioppoli généralisée

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $A = (a_{ij}(x)) \in L^\infty(\Omega, \mathcal{M}_d(\mathbb{R}))$ une fonction à valeurs matricielles et $\alpha > 0$ tels que :

$$\forall\, x \in \Omega, \forall\, \xi \in \mathbb{R}^d, \qquad \alpha|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j.$$

Soient $b \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$ et $c \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. On considère l'opérateur linéaire défini par :

$$\begin{aligned} Lu &= -\mathrm{div}(A(x)\nabla u) + b(x).\nabla u + c(x)u \\ &= -\sum_{i,j=1}^{d} \partial_{x_i}(a_{ij}(x)\partial_{x_j} u) + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\partial_{x_i} u + c(x)u. \end{aligned}$$

Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $u \in H^1(\Omega)$ telles que $Lu = f$ au sens des distributions. Soit $\Omega' \subset \Omega$ un ouvert borné tel que $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Montrer que :

$$\int_{\Omega'} |\nabla u|^2 dx \leq C \int_{\Omega} (u^2 + f^2) dx.$$

[Indication : on pourra utiliser comme fonction test $\eta^2 u$ où $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ et vaut 1 sur Ω'.]

Exercice 5 : estimation des dérivées d'une fonction harmonique

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ une fonction harmonique dans Ω.

1. Montrer que si $\overline{B}(x_0, r) \subset \Omega$, alors, pour tout $j = 1, ..., n$:

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0) = \frac{1}{|B(x_0, r)|} \int_{\partial B(x_0,r)} u(y)\nu_j(y) dy$$

où ν_j est la j-ième coordonnée du vecteur normal unitaire à $\partial B(x_0, r)$.

2. On suppose que $m \leq u \leq M$ sur $\partial B(x_0, r)$ pour deux constantes m et M. Montrer que :

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0) \right| \leq C_n \frac{M - m}{r}$$

où C_n est une constante qui dépend uniquement de la dimension n.

3. En déduire que si $m \leq u \leq M$ sur Ω, alors :

$$\forall\, x \in \Omega, \qquad \|\nabla u(x)\| \leq C'_n \frac{M - m}{d(x, \partial\Omega)}$$

où $\| \cdot \|$ désigne la norme euclidienne usuelle.

Exercice 6 : conséquences de la propriété de la moyenne pour les fonctions harmoniques

1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ harmonique dans Ω. Soit $x_0 \in \Omega$, on note $\rho(x_0) = \mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega) > 0$. Montrer que pour tout $r \in]0, \rho(x_0)[$ et toute fonction radiale $y \mapsto \psi(|y|) \in L^1(B(0, r))$, on a l'égalité suivante :

$$f(x_0) \int_{B(0,r)} \psi(|y|)\, dy = \int_{B(0,r)} f(x_0 + y)\psi(|y|)\, dy.$$

2. Montrer que toute fonction harmonique sur $\mathbb{R}^n$ tendant vers 0 à l'infini est identiquement nulle sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 7 : régularité d'une distribution harmonique

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On dira que T est une distribution harmonique sur Ω si $\Delta T = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Le but de l'exercice est de montrer que si T est une distribution harmonique sur Ω, T est en fait une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω.

1. a) Soient $x_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tels que $B(x_0, 2r) \subset \Omega$. On introduit $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ qui satisfait

$$0 \leq \phi \leq 1, \quad \mathrm{supp}(\phi) \subset B(x_0, 3r/2), \quad \phi(x) = 1 \text{ pour } |x - x_0| \leq r.$$

Montrer que ϕT est une distribution harmonique sur $B(x_0, r)$. On notera encore ϕT le prolongement de $\phi T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ par 0 en dehors de Ω.

b) Soit $(\theta_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une suite régularisante positive de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ satisfaisant

$$\mathrm{supp}(\theta_\varepsilon) \subset B(0, \varepsilon), \quad \int_{\mathbb{R}^n} \theta_\varepsilon(x)\, dx = 1.$$

Montrer que $\theta_\varepsilon * (\phi T) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ est harmonique dans $B(x_0, r - \varepsilon)$.

c) On suppopse maintenant que $0 < \varepsilon < r/4$. On considère la fonction radiale $\Psi(x) = \psi(|x|^2)$ à support dans $B(0, r/4)$ avec $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+)$ et $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(|z|^2)\, dz = 1$. Montrer que pour tout $x \in B(x_0, r/2)$,

$$\theta_\varepsilon * (\phi T)(x) = \Psi * (\theta_\varepsilon * (\phi T))(x).$$

d) Montrer que $\Psi * (\theta_\varepsilon * (\phi T))$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^n$ vers $\Psi * (\phi T)$ lorsque $\varepsilon \to 0$.

e) Montrer que T est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $B(x_0, r/2)$ puis conclure.

2. Montrer que toute distribution tempérée T harmonique sur $\mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire que $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ vérifie $\Delta T = 0$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$) est une fonction polynomiale.