TD n°2 : Équations de la chaleur et de Fokker-Planck

Dans tout le TD, n désigne un entier naturel non nul.

Exercice 1 : principe du maximum faible pour l'équation de la chaleur

Le but de cet exercice est de prouver un principe du maximum faible pour l'équation de la chaleur. On considère Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $T>0$. On définit :

$$K_T = [0,T]\times\overline{\Omega} \quad \text{et} \quad \Gamma_T = \left(\{0\} \times \overline{\Omega}\right) \cup ([0,T]\times\partial\Omega)\,.$$

On note également

$$Q =]0,+\infty[\times\Omega \quad \text{et donc} \quad \overline{Q} = [0,+\infty[\times\overline{\Omega}.$$

Soit $u \in \mathcal{C}^0(\overline{Q}) \cap \mathcal{C}^2(Q)$ telle que $\partial_t u - \Delta u \le 0$ dans Q.

1. Soit $\varepsilon > 0$. On introduit la fonction u_ε définie par $u_\varepsilon(t,x) = u(t,x) + \varepsilon |x|^2$ sur $\overline{Q}$.

a) Montrer que $u_{\varepsilon_{|K_T}}$ atteint son maximum en un point $(t_\varepsilon, x_\varepsilon) \in K_T$ puis que si $(t_\varepsilon,x_\varepsilon) \notin \Gamma_T$, on a $\Delta u_\varepsilon(t_\varepsilon,x_\varepsilon) \le 0$.

b) Toujours en supposant que $(t_\varepsilon,x_\varepsilon)\notin\Gamma_T$, montrer que $\partial_t u_\varepsilon(t_\varepsilon,x_\varepsilon) \ge 0$.

c) Montrer que $(t_\varepsilon,x_\varepsilon)\in\Gamma_T$.

2. Montrer que $\sup_{K_T} u = \sup_{\Gamma_T} u$.

Exercice 2 : principe du maximum fort pour l'équation de la chaleur

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $T>0$. On note $\Omega_T = (0,T]\times\Omega$.

1. Dans cette première question, on va démontrer une formule de la moyenne pour l'équation de la chaleur. On introduit la fonction Φ définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ par

$$\Phi(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & \text{si} \quad t>0 \\ 0 & \text{si} \quad t \le 0 \end{cases}$$

puis l'ensemble $E(t,x;r)$ pour $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ et $r>0$ défini par

$$E(t,x;r) = \left\{(s,y)\in\mathbb{R}^{n+1};\ s\le t,\ \Phi(t-s,x-y) \ge 1/r^n\right\}.$$

a) On fixe $(t,x)\in\Omega_T$ et on pose

$$\phi(r) = \frac{1}{r^n}\iint_{E(t,x;r)} u(s,y)\,\frac{|x-y|^2}{(t-s)^2}\,dy\,ds$$

pour $r>0$ assez petit pour que $E(t,x;r)\subset\Omega_T$. On suppose que $u\in\mathcal{C}^2(\Omega_T)$ est solution de l'équation de la chaleur sur Ω_T (c'est-à-dire vérifie $\partial_t u = \Delta u$ sur Ω_T). Montrer que ϕ est constante.

[Indication : on pourra utiliser la fonction ψ définie par $\psi(s,y) = -n/2\ln(-4\pi s) + |y|^2/4s + n\ln(r)$.]

b) En admettant que

$$\iint_{E(1)} \frac{|y|^2}{s^2}\,dy\,ds = 4,$$

montrer que si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega_T)$ est solution de l'équation de la chaleur sur Ω_T, alors

$$u(t,x) = \frac{1}{4r^n} \iint_{E(t,x;r)} u(s,y)\, \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2}\, dy\, ds$$

pour tout $E(t,x;r) \subset \Omega_T$.

2. Montrer que si Ω est convexe et qu'il existe un point $(t_0, x_0) \in \Omega_T$ tel que

$$u(t_0, x_0) = \max_{\overline{\Omega}_T} u$$

alors u est constante sur Ω_{t_0}.

Exercice 3 : inégalité de Poincaré-Wirtinger et équation de la chaleur en dimension 1

1. Soit $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ qui est T-périodique. Montrer que si $\int_0^T u(t)\, dt = 0$ alors

$$\left(\int_0^T |u(t)|^2\, dt \right)^{1/2} \leq \frac{T}{2\pi} \left(\int_0^T |u'(t)|^2\, dt \right)^{1/2}.$$

[Indication : utiliser une décomposition en séries de Fourier.]

2. Soit $u = u(t,x)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, 2π-périodique en x, et solution de l'équation de la chaleur

$$\partial_t u - \partial_x(\gamma(x)\partial_x u) = 0,$$

où γ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$, 2π-périodique et minorée par une constante strictement positive. Montrer que si la moyenne $\int_{-\pi}^{\pi} u(0,x)\, dx$ s'annule, alors il existe une constante C telle que, pour tout temps $t \geq 0$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(t,x)^2\, dx \leq e^{-tC} \int_{-\pi}^{\pi} u(0,x)^2\, dx.$$

Exercice 4 : régularité pour l'équation de Kolmogorov

Une fonction $f = f(t,x,v)$ à valeurs réelles définie pour $(t,x,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est une solution de l'équation de Kolmogorov associée à la donnée initiale $f_0 = f_0(x,v)$, $(x,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si elle satisfait :

$$\partial_t f = Lf, \quad f_{|t=0} = f_0 \qquad \text{où} \quad Lf = -v\partial_x f + \partial_{vv} f.$$

On introduit les espaces $L^2 = L^2([0,1] \times \mathbb{R})$ et $H^1 = H^1([0,1] \times \mathbb{R})$ associé à la norme

$$\|f\|_{H^1}^2 = \|f\|_{L^2}^2 + \|\partial_v f\|_{L^2}^2 + \|\partial_x f\|_{L^2}^2.$$

On introduit également l'espace X :

$$X = \{(x,v) \in [0,1] \times \mathbb{R} \mapsto g(x,v) \in \mathbb{R} : \ \forall v \in \mathbb{R},\ g(\cdot, v) \in \mathcal{C}^\infty([0,1]) \ \text{ et } \ \forall x \in [0,1],\ g(x,\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\}.$$

On introduit une fonctionnelle $\mathcal{F}$ définie sur $[0,1] \times H^1$ par

$$\mathcal{F}(t,h) = A\|h\|_{L^2}^2 + Bt\|\partial_v h\|_{L^2}^2 + Ct^2\langle \partial_x h, \partial_v h\rangle_{L^2} + t^3\|\partial_x h\|^2, \quad (t,h) \in [0,1] \times H^1$$

où A, B et C sont des constantes strictement positives à déterminer.
1. Montrer que si $C \leq \sqrt{B}$, on a $\mathcal{F}(t,h) \geq A\|h\|_{L^2}^2 + (Bt/2)\|\partial_v h\|_{L^2}^2 + (t^3/2)\|\partial_x h\|_{L^2}^2$ pour tout $t \in [0,1]$ et tout $h \in H^1$.
2. Montrer qu'on peut choisir les constantes A, B et C respectant la condition $C \leq \sqrt{B}$ telles que si f est une solution 1-périodique en x de l'équation de Kolmogorov associée à une donnée initiale $f_0 \in X$ et telle que $t \mapsto f(t,\cdot,\cdot) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, X)$ alors en notant $f_t = f(t,\cdot,\cdot)$, on a :

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(t, f_t) \leq 0, \quad \forall\, t \in [0,1].$$

3. Montrer qu'on a alors les estimations suivantes :

$$\|\partial_v f_t\|_{L^2} \leq \frac{C'}{\sqrt{t}}\|f_0\|_{L^2} \quad \text{et} \quad \|f_t\|_{H^1} \leq \frac{C'}{t^{3/2}}\|f_0\|_{L^2}, \quad \forall\, t \in]0,1]$$

où C' est une constante strictement positive.

Exercice 5 : inégalité de Poincaré et équation de Fokker-Planck

Dans cet exercice, on prouve des inégalités de Poincaré "à poids" qui sont adaptées à l'étude du comportement en temps grand des solutions de l'équation de Fokker-Planck.
1. (Inégalité de Poincaré-Wirtinger) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ borné et convexe. On considère $\nu \in L^1(\Omega)$ telle que $\int_\Omega \nu\, dx = 1$ et telle que $\nu, 1/\nu \in L^\infty(\Omega)$. Montrer qu'il existe une constante $\kappa > 0$ telle que pour toute fonction f telle que $\int_\Omega f^2\nu < \infty$ et $\int_\Omega |\nabla f|^2\, \nu < \infty$, on ait :

$$\kappa \int_\Omega |f - \langle f\rangle_\nu|^2\, \nu\, dx \leq \int_\Omega |\nabla f|^2\, \nu\, dx \quad \text{où} \quad \langle f\rangle_\nu = \int_\Omega f\, \nu\, dx.$$

En déduire que

$$\int_\Omega f^2\, \nu\, dx \leq \langle f\rangle_\nu^2 + \frac{1}{\kappa}\int_\Omega |\nabla f|^2\, \nu\, dx.$$

[Indication : écrire une formule de Taylor.]
2. Montrer qu'il existe une fonction $W \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ telle que $W \geq 1$ et qu'il existe des constantes $\theta > 0$, $b, R \geq 0$ telles que

$$(L^*W)(x) = \Delta W(x) - x \cdot \nabla W(x) \leq -\theta\, W(x) + b\, \mathbb{1}_{B(0,R)}(x), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

[Indication : chercher W sous la forme $W(x) = e^{\gamma\langle x\rangle}$ où $\langle x\rangle^2 = 1 + |x|^2$.]

Dans la suite de l'exercice, on considère une solution $f = f(t,x)$, $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ de l'équation de Fokker-Planck

$$\partial_t f = \Delta_x f + \mathrm{div}_x(xf), \quad f(0,\cdot) = f_0,$$

avec $t \mapsto f(t,\cdot) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$.
3. On note $G(x) = (2\pi)^{-n/2}\, e^{-|x|^2/2}$. Vérifier que G est une solution stationnaire de l'équation.
4. a) Montrer que pour toute fonction g telle que $\int_{\mathbb{R}^n} g^2\, G\, dx < \infty$ et $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla g|^2\, G\, dx < \infty$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} g^2 G\, dx \leq C\left(\langle g\rangle_{\nu_R}^2 + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla g|^2 G\, dx\right)$$

où $\nu_R = G/(\int_{B(0,R)} G)$ et $\langle g \rangle_{\nu_R} = \int_{B(0,R)} g\nu_R \, dx$ pour une constante $C > 0$.
b) Prouver l'inégalité de Poincaré : il existe une constante $C_P > 0$ (qui ne dépend que de la dimension n) telle que pour toute fonction h telle que $\int_{\mathbb{R}^n} h^2 \, G \, dx < \infty$ et $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla h|^2 \, G \, dx < \infty$, on a l'estimation suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla h|^2 \, G \, dx \geq C_P \int_{\mathbb{R}^n} |h - \langle h \rangle_G|^2 \, G \, dx,$$

où $\langle h \rangle_G = \int_{\mathbb{R}^n} h \, G \, dx$.
5. Vérifier qu'on a la propriété suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(t,x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f_0(x) \, dx, \quad \forall \, t \geq 0.$$

6. Montrer qu'on peut écrire l'équation de Fokker-Planck sous la forme

$$\partial_t f = \mathrm{div}_x \big(G \, \nabla_x (f \, G^{-1}) \big).$$

7. Montrer le résultat suivant sur le comportement asymptotique de la solution : si pour tout $t \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} f(t,x)^2 G^{-1}(x) \, dx < \infty$ et $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_x (f(t,x)/G)|^2 G(x) \, dx < \infty$,

$$\|f(t,.) - \langle f_0 \rangle \, G\|_E \leq e^{-C_P t} \, \|f_0 - \langle f_0 \rangle \, G\|_E$$

où on a noté $\langle f_0 \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f_0(x) \, dx$, $\| \cdot \|_E$ la norme de l'espace de Hilbert $E = L^2(G^{-1})$ définie par

$$\|f\|_E^2 = \int_{\mathbb{R}^n} f^2(x) \, G^{-1}(x) \, dx$$

et C_P la constante de Poincaré introduite à la question 2.
[Indication : remarquer qu'on peut supposer $\langle f_0 \rangle = 0$ par linéarité de l'équation.]