TD n°3 : Équations des ondes et méthode des caractéristiques

Dans tout le TD, n désigne un entier naturel non nul.

Exercice 1 : propriétés de base de l'équation des ondes
On considère f et g deux fonctions $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$. Soit $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^3)$ solution de

$$(1) \qquad \begin{cases} \partial_t^2 u(t,x) - \Delta u(t,x) = 0 & \text{sur} \quad \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^3 \\ (u(x), \partial_t u(x))|_{t=0} = (f(x), g(x)) & \text{sur} \quad \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

1. Montrer que si $t \geq 1$, on a :

$$|u(t,x)| \leq \frac{1}{4\pi t} \left(\sum_{i=1}^3 \|\partial_{x_i} g\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq 2} \|\partial^\alpha f\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \right).$$

2. On suppose que $\mathrm{supp}(f) \subset B(0,R)$ et de même pour $\mathrm{supp}(g)$. Montrer que pour tout $t > 0$, $\mathrm{supp}(u(t,\cdot)) \subset B(0, R+t)$.
3. On suppose encore que $\mathrm{supp}(f) \subset B(0,R)$ et de même pour $\mathrm{supp}(g)$. Montrer que u est nulle dans l'ensemble $\{(t,x) : t > R, |x| < t - R\}$.
4. Soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3$. On définit le cône $C(t_0, x_0)$ par :

$$C(t_0, x_0) = \{(t,x) \, : \, |x - x_0| < t_0 - t, \, t < t_0\}.$$

Montrer que si f et g sont nulles sur l'intersection de l'hyperplan $t = 0$ avec le cône $C(t_0, x_0)$ alors on a $u(t_0, x_0) = 0$.

Exercice 2 : propagation des singularités pour l'équation des ondes

1. Résoudre l'équation des ondes sur $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^n$:

$$(2) \qquad \begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u & = 0 \\ (u, \partial_t u)|_{t=0} & = (0, f) \end{cases}$$

où $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ est à support compact et $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, H^2(\mathbb{R}^n))$. Montrer que si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$.

Définitions. *On considère $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.*

(i) On dit que f est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ s'il existe un voisinage ω de x_0 tel que pour toute $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\omega)$, on a $\phi f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. On définit alors le support singulier *de f par son complémentaire : $x \notin \mathrm{singsupp}(f)$ s'il existe un voisinage de x sur lequel f est $\mathcal{C}^\infty$.*

(ii) On définit également $\Sigma(f)$ par son complémentaire : on dira que $\xi \notin \Sigma(f)$ si $\widehat{f}$ est à décroissance rapide sur un voisinage conique de u.

(iii) On dit que f est microlocalement $\mathcal{C}^\infty$ *en un point $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ s'il existe un ouvert ω de $\mathbb{R}^n$ contenant x_0 et un cône ouvert de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ contenant ξ_0 tels que :*

$$\forall \, \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\omega), \quad \forall \, N \in \mathbb{N}, \quad \exists \, C_N > 0 \, : \, \forall \, \xi \in \Gamma, \, \left|\widehat{\phi f}\right| \leq C_N (1 + |\xi|)^{-N}.$$

(iv) L'ensemble des points (x_0, ξ_0) *où* f *n'est pas microlocalement* $\mathcal{C}^\infty$ *est appelé le front d'onde de* f *et est noté* $\mathrm{WF}(f)$.

2. On considère une solution u de (1). Soit $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\chi(\xi) = 1$ pour $|\xi| \geq 1$ et $\chi = 0$ au voisinage de 0. Vérifier que :

$$u(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\frac{1}{2i}(u_+ - u_-) + \frac{1}{(2\pi)^n}\int (1-\chi(\xi))\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}e^{ix.\xi}\hat{f}(\xi)d\xi$$

où on a noté :

$$u_\pm(t,x) = \int \frac{\chi(\xi)}{|\xi|}e^{i(x.\xi \pm t|\xi|)}\hat{f}(\xi)d\xi.$$

3. Montrer que $\mathrm{WF}(u(t)) \subset \mathrm{WF}(u_+(t)) \cup \mathrm{WF}(u_-(t))$.

4. On suppose fixé $t \in \mathbb{R}$ et $x_0 \notin \mathrm{Supp}(f) - t\Sigma_1(f)$, où $\Sigma_1(f) = \Sigma(f) \cap \{|\xi| = 1\}$. Soit U un voisinage de x_0 et Γ un voisinage conique de $\Sigma(f)$ tels que :

$$U \cap (\mathrm{Supp}(f) - t\Gamma_1) = \emptyset$$

où on a noté $\Gamma_1 = \Gamma \cap \{|\xi| = 1\}$. On introduit ψ homogène de degré 0 telle que $\psi = 1$ sur un voisinage conique de $\Sigma(f)$ et $\psi(\xi) = 0$ pour $\xi \notin \Gamma$. On écrit $u_+ = u_+^1 + u_+^2$ où :

$$u_+^1(t,x) = \int \frac{\psi(\xi)\chi(\xi)}{|\xi|}e^{i(x.\xi + t|\xi|)}\hat{f}(\xi)\,d\xi,$$
$$u_+^2(t,x) = \int \frac{(1-\psi(\xi))\chi(\xi)}{|\xi|}e^{i(x.\xi + t|\xi|)}\hat{f}(\xi)\,d\xi.$$

Montrer que $\mathrm{singsupp}(u_+) = \mathrm{singsupp}(u_+^1)$.

5. En utilisant la relation

$$\sum_{j=1}^n \frac{x_j - y_j + t\frac{\xi_j}{|\xi|}}{i\left|x - y + t\frac{\xi}{|\xi|}\right|^2}\partial_j e^{i((x-y).\xi + t|\xi|)} = e^{i((x-y).\xi + t|\xi|)},$$

montrer que $u_+^1 \in \mathcal{C}^\infty(U)$. En déduire $x_0 \notin \mathrm{singsupp}(u_+(t))$.

6. En déduire le « théorème de propagation des singularités » suivant :

$$\mathrm{singsupp}(u(t)) \subset \cup_{(x,\xi)\in \mathrm{WF}(f)}\left(x \pm t\frac{\xi}{|\xi|}\right).$$

Exercice 3 : méthode des caractéristiques

1. Soit $v \in \mathbb{R}^n$ et $f_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. Montrer que le problème de Cauchy d'inconnue $f = f(t,x)$

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = 0, \qquad f(0,x) = f_0(x),$$

admet une unique solution $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$, donnée par la formule

$$f(t,x) = f_0(x - tv), \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}_+,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

2. [Lemme de Gronwall] Soient $A > 0$, $B > 0$ et $\phi \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue telle que, pour tout $t \geq 0$,

$$\phi(t) \leq A + B \int_0^t \phi(s)\, ds.$$

Montrer que, pour tout $t \geq 0$, on a l'inégalité $\phi(t) \leq A e^{Bt}$.
3. Soit $T > 0$ et $V \colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs admettant des dérivées partielles d'ordre 1 par rapport aux variables x_j pour $j = 1, \ldots, d$ et vérifiant les hypothèses suivantes

$$(\mathbf{H1}) \qquad V \text{ et } \nabla_x V \text{ sont continues sur } [0,T] \times \mathbb{R}^n,$$

et il existe une constante $\kappa > 0$ telle que, pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$,

$$(\mathbf{H2}) \qquad |V(t,x)| \leq \kappa(1 + |x|).$$

On considère maintenant le problème à coefficients variables

$$\partial_t f(t,x) + V(t,x) \cdot \nabla_x f(t,x) = 0, \quad f(0,x) = f_0(x),$$

pour lequel on souhaite étendre la méthode présentée à la question 1. pour le cas de coefficients constants.
On dit que γ est une courbe intégrale du champ V passant par x à l'instant t si $\gamma \colon s \mapsto \gamma(s) \in \mathbb{R}^n$ vérifie

$$\frac{d}{ds}\gamma(s) = V(s, \gamma(s)), \qquad \gamma(t) = x.$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz entraîne l'existence locale d'une telle courbe intégrale.
Montrer que pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ la courbe intégrale $s \mapsto \gamma(s)$ de V passant par x à l'instant t est définie pour tout $s \in [0,T]$. Dans la suite on notera $s \mapsto X(s,t,x)$ cette courbe intégrale, qui est donc par définition solution de

$$\partial_s X(s,t,x) = V(s, X(s,t,x)), \qquad X(t,t,x) = x.$$

L'application $X : [0,T] \times [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ainsi définie est appelée le *flot caractéristique* de l'équation $\partial_t + V \cdot \nabla_x$.
4. Soient $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle

$$\dot{y}(s) = y(s)^2, \quad y(t) = x$$

et en déduire que l'on ne peut pas définir le flot de $\partial_t + x^2 \partial_x$ de façon globale (on remarque que dans ce cas, l'hypothèse ($\mathbf{H2}$) n'est pas vérifiée).
5. Montrer que pour tous $t_1, t_2, t_3 \in [0,T]$, on a

$$X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) = X(t_3, t_1, x).$$

6. Montrer que $\partial_s \partial_{x_j} X(s,t,x)$ et $\partial_{x_j} \partial_s X(s,t,x)$ existent pour tous $(s,t,x) \in]0,T[\times]0,T[\times \mathbb{R}^n$, et se prolongent en des fonctions continues sur $[0,T] \times [0,T] \times \mathbb{R}^n$ et que

$$\partial_s \partial_{x_j} X(s,t,x) = \partial_{x_j} \partial_s X(s,t,x),$$

pour tout $(s,t,x) \in [0,T] \times [0,T] \times \mathbb{R}^n$.
7. Montrer que pour tout $(s,t) \in [0,T] \times [0,T]$ l'application

$$X(s,t,\cdot)\colon x \mapsto X(s,t,x)$$

est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.
8. Montrer que $X \in \mathcal{C}^1([0,T] \times [0,T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$.
9. Montrer que

$$\partial_t X(0,t,x) + \sum_{j=0}^{d} V_j(t,x) \partial_{x_j} X(0,t,x) = 0,$$

pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$.
10. Soit $f_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. Montrer que la fonction f définie par

$$f(t,x) = f_0(X(0,t,x))$$

est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ et vérifie

$$\partial_t f(t,x) + V(t,x) \cdot \nabla_x f(t,x) = 0, \quad f(0,x) = f_0(x).$$

Exercice 4 : équation de transport avec terme source et terme d'amortissement
On considère $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ ainsi que a et $S \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$. Montrer que l'équation

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + v \cdot \nabla_x u(t,x) + a(t,x) u(t,x) = S(t,x) \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R} \\ u(0,\cdot) = u_0 \end{cases}$$

admet une unique solution $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ et donner une expression de cette solution.

Exercice 5 : équation de Burgers
On considère l'équation de Burgers en dimension 1 :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \frac{1}{2} \partial_x (u^2)(t,x) = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R} \\ u(0,\cdot) = u_0. \end{cases} \tag{3}$$

qui peut s'écrire aussi sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + u(t,x) \partial_x u(t,x) = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R} \\ u(0,\cdot) = u_0. \end{cases}$$

Sous cette seconde forme, on voit apparaitre une équation de transport (non linéaire) et plus précisément, u est solution d'une équation de transport dont la vitesse de propagation au point x et à l'instant t est égale à $u(t,x)$.
1. Soit $T > 0$. On suppose que u est une solution de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,T[\times \mathbb{R}$ de l'équation (3). Appliquer la méthode des caractéristiques et prouver que pour tout $0 \leq s < T$ et tout $z \in \mathbb{R}$, on a :

$$u(s, z + s u(0,z)) = u(0,z).$$

2. On suppose que $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, que u_0 est bornée ainsi que sa dérivée u_0'. Dans l'exercice 2 du TD 1, on a vu qu'en posant

$$T = \frac{1}{\sup_{z\in\mathbb{R}}(\max(0, -u_0'(z))},$$

l'équation (3) admet une solution de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, T[\times\mathbb{R}$. Montrer l'unicité de cette solution.

Exercice 6 : méthode des caractéristiques

1. On note $\mathbb{S} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\, x_1^2 + x_2^2 = 1\}$. On considère le problème suivant en dimension 2 :

$$\left\{\begin{array}{lll} (\partial_{x_1} u)^2 + (\partial_{x_2} u)^2 = 1 & \text{sur} & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ u = 0 & \text{sur} & \mathbb{S}. \end{array}\right.$$

Appliquer la méthode des caractéristiques à cette équation et en déduire deux solutions possibles.

2. Soit $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Trouver une solution du problème suivant

$$\left\{\begin{array}{lll} \partial_{x_1} u + x_1 \partial_{x_2} u = u & \text{sur} & \mathbb{R}^2 \\ u(1, \cdot) = h & \text{sur} & \mathbb{R}. \end{array}\right.$$

au moyen de la méthode des caractéristiques.