TD n°4 : Équations de Hamilton-Jacobi

Dans tout le TD, n désigne un entier naturel non nul et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1 : fonctions semi-continues

Soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$.

1. Soit $x_0 \in \Omega$. Montrer que u est sci en x_0 si et seulement si $\underline{\lim}_{x \to x_0} u(x) \geq u(x_0)$.

2. Montrer que u est sci sur Ω si et seulement si son épigraphe est fermé. On rappelle que l'épigraphe de u est défini par

$$\operatorname{epi} u = \{(x, r) \in \Omega \times \mathbb{R},\, u(x) \leq r\}.$$

3. Montrer que u est sci sur Ω si et seulement si u est la limite croissante d'une suite de fonctions continues sur Ω.
[Indication : pour le sens direct, dans le cas où $u > 0$, on pourra poser $u_n(x) = \inf_{y \in \Omega}\{u(y) + n|x - y|\}$ où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.]

Exercice 2 : enveloppes scs et semi-limites relaxées

1. Soit $(u^\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ une famille de fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$ localement bornées par dessus sur Ω. Montrer que

$$\left(\sup_{\alpha \in \mathcal{A}} u^\alpha\right)^* = \left(\sup_{\alpha \in \mathcal{A}} (u^\alpha)^*\right)^*.$$

2. Soit $(u^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ une famille de fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$ qui est uniformément localement bornée par dessus sur Ω. Montrer que

$$\overline{\lim_{\varepsilon}}^* u^\varepsilon = \overline{\lim_{\varepsilon}}^* (u^\varepsilon)^*.$$

Exercice 3 : sur et sous-différentiels

Soient $u : \Omega \to \mathbb{R}$ sci (resp. scs) et $x_0 \in \Omega$. Le sous-différentiel $D^{2,-}u(x_0)$ (resp. sur-différentiel $D^{2,+}u(x_0)$) d'ordre 2 en x_0 de u est l'ensemble des couples $(p, X) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tels qu'il existe $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ touchant u par dessous (resp. dessus) en x_0 telle que $(p, X) = (\nabla\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0))$.

1. Si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, déterminer $D^{2,+}u(x_0)$ et $D^{2,-}u(x_0)$ pour $x_0 \in \Omega$.

2. En admettant le lemme qui suit, montrer que $(p, X) \in D^{2,-}u(x_0)$ si et seulement si pour x dans un voisinage de x_0,

$$u(x) - u(x_0) \geq p \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} X(x - x_0) \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|^2).$$

Lemme. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 et $\varepsilon : U \to \mathbb{R}$ localement bornée et qui tend vers 0 en 0. Alors, il existe $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ en dehors de 0 et telle que $|\varepsilon| \leq \eta$ au voisinage de 0 et pour tout $\nu \in \mathbb{N}^n$, $|x|^{|\nu|}|\partial^\nu \eta(x)| \to 0$ lorsque $x \to 0$.*

3. Soit $u(x) = |\cos x|$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $D^{2,-}u(x_0)$ pour $x_0 \in \mathbb{R}$.

4. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $(p, X) \in D^{2,-}u(x_0)$.

(ii) Il existe une fonction φ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $u-\varphi$ atteint un minimum local en x_0 et $(p,X) = (\nabla\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0))$.

(iii) Il existe une fonction φ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $u-\varphi$ atteint un minimum local strict en x_0 et $(p,X) = (\nabla\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0))$.

5. On considère l'équation

$$F(x,u,\nabla u, D^2 u) = 0 \quad \text{sur} \quad \Omega \tag{1}$$

où $F : (x,z,p,A) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mapsto F(x,z,p,A) \in \mathbb{R}$ est continue, croissante en z et elliptique dégénérée.
On rappelle la définition de sur-solution de viscosité : $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est sur-solution de viscosité de (1) sur Ω si u est localement bornée inférieurement et si pour tout $x_0 \in \Omega$ et pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ touchant u_* par dessous en $x_0 \in \Omega$, alors $F(x_0, u(x_0), \nabla\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \geq 0$.
Déduire de l'exercice une nouvelle définition des sur-solutions de viscosité en termes de sous-différentiels.

Exercice 4 : plusieurs définitions des solutions de viscosité

Le cadre est le même que dans la question 5. de l'exercice précédent.

1. Montrer que dans la définition de sur-solution de viscosité, on peut remplacer la condition "φ touche u_* par dessous en x_0" par "$u_* - \varphi$ admet un minimum local en x_0".

2. Montrer qu'en changeant $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ par $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, on ne change pas la notion de sur-solution de viscosité.

3. Montrer que lorsque l'équation est d'ordre 1, on ne change pas la notion de sur-solution de viscosité en remplaçant $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ par $\varphi \in \mathcal{C}^1(\Omega)$.