TD n°5 : Équations de Hamilton-Jacobi

Exercice 1 : unicité pour l'équation eikonale

1. Montrer que si $v_1 \in \mathcal{C}^1([-1,1])$ (resp. $v_2 \in \mathcal{C}^1([-1,1])$) est une sous-solution de viscosité (resp. une sur-solution de viscosité) de $v + |v'| = 0$ sur $]-1,1[$ et si v_1 et v_2 sont telles que $v_1 \leq v_2$ sur $\{-1,1\}$, alors $v_1 \leq v_2$ sur $[-1,1]$.

2. Montrer que si v_1 (resp. v_2) est une sous-solution de viscosité scs (resp. une sur-solution de viscosité sci) de $v + |v'| = 0$ sur $]-1,1[$ telles que $v_1 \leq v_2$ sur $\{-1,1\}$, alors $v_1 \leq v_2$ sur $[-1,1]$.

3. Montrer que u est une sous-solution de viscosité scs (resp. sur-solution de viscosité sci) de $|u'| - 1 = 0$ sur $]-1,1[$ si et seulement si $v = -e^{-u}$ est une sous-solution de viscosité scs (resp. sur-solution de viscosité sci) de $v + |v'| = 0$ sur $]-1,1[$.

4. Montrer que $U(x) = 1 - |x|$ est l'unique solution de viscosité continue de

$$\begin{cases} |u'| - 1 = 0 \quad \text{sur} \quad]-1,1[\\ u(1) = u(-1) = 0. \end{cases}$$

c'est-à-dire que U est une fonction continue sur $[-1,1]$ qui vaut 0 en ± 1 et une solution de viscosité continue de $|u'| - 1 = 0$ sur $]-1,1[$.

Exercice 2 : unicité dans l'espace entier

Soit n un entier naturel non nul. Soit $H : (x,p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto H(x,p) \in \mathbb{R}$. On suppose que H est dérivable par rapport à ses deux variables x et à p et qu'il existe une constante $C_H > 0$ telle que

$$|\partial_x H(x,p)| \leq C_H(1 + |p|) \quad \text{et} \quad |\partial_p H(x,p)| \leq C_H, \quad \forall\, x,\, p \in \mathbb{R}^n.$$

On considère l'équation de Hamilton-Jacobi d'ordre 1 suivante :

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} \partial_t u(t,x) + H(x, \nabla_x u(t,x)) = 0 & \text{sur} \quad \mathbb{R}^+_* \times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{sur} \quad \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

En adaptant la preuve d'unicité du cours dans le cas périodique, montrer qu'on a un résultat d'unicité pour (1) dans le cadre des solutions de viscosité continues bornées sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$.
[Indication : on pourra poser $M = \sup_{[0,T[\times\mathbb{R}^n} \left(u - v - \sigma/(T-t) - \alpha|x|^2\right)$ avec $T > 0$, $\sigma > 0$ et $\alpha > 0$.]

Exercice 3 : schéma numérique

On considère une fonction $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ dérivable et périodique. On s'intéresse à l'équation eikonale suivante en dimension 1 :

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} \partial_t u(t,x) - c(x)\, |\partial_x u(t,x)| = 0 & \text{sur} \quad \mathbb{R}^+_* \times \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{sur} \quad \mathbb{R} \end{cases}$$

où u_0 est de classe $\mathcal{C}^1$, Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ de constante de Lipschitz L_0 et périodique.
On se donne une grille en espace et en temps

$$\mathbb{R} = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} [i\Delta x, (i+1)\Delta x] \quad \text{et} \quad \mathbb{R}^+ = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [n\Delta t, (n+1)\Delta t]$$

où $\Delta x > 0$ et $\Delta t > 0$ sont des pas de discrétisation. Pour $h = (\Delta t, \Delta x) \in (\mathbb{R}_*^+)^2$, on note

$$\mathcal{G}^h = \{(n\Delta t, i\Delta x),\, n \in \mathbb{N},\, i \in \mathbb{Z}\}$$

la grille de discrétisation.
Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $a_+ = \max(a, 0)$ et $a_- = \max(-a, 0)$. On définit $u^h : \mathcal{G}^h \to \mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} u^h(0,x) = u_0(x),\ \forall\, x \in \{i\Delta x,\, i \in \mathbb{Z}\} \\ u^h(t+\Delta t, x) = S^h(t, x, u^h(t,x), u^h(t, x+\Delta x), u^h(t, x-\Delta x)),\ \forall\,(t,x) \in \mathcal{G}^h \end{cases}$$

où pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ et tout α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$,

$$S^h(t,x,\alpha,\beta,\gamma) = \alpha + (\Delta t)\, c(x) \max\left(\left(\frac{\beta-\alpha}{\Delta x}\right)_+, \left(\frac{\alpha-\gamma}{\Delta x}\right)_-\right).$$

1. Montrer que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R})$, on a

$$\frac{\varphi(t+\Delta t, x) - S^h(t, x, \varphi(t,x), \varphi(t, x+\Delta x), \varphi(t, x-\Delta x))}{\Delta t} \xrightarrow[h\to 0]{} \partial_t\varphi(t,x) - c(x)|\partial_x\varphi(t,x)|$$

pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}$. On dit que S^h est un *schéma numérique consistant.*
2. Soit $c_0 > 0$ tel que $0 \le c \le c_0$ sur $\mathbb{R}$. Trouver une condition sur c_0, Δt et Δx pour que S^h soit monotone et de même monotonie par rapport à ses trois dernières variables. On dit que S^h est un *schéma numérique monotone.* On note H l'ensemble des h qui vérifient cette condition et considère désormais uniquement des h appartenant à H.
3. Montrer que la monotonie du schéma implique le principe de comparaison discret suivant : soient $u_1^h : \mathcal{G}^h \to \mathbb{R}$ et $u_2^h : \mathcal{G}^h \to \mathbb{R}$ telles que

$$u_1^h(t+\Delta t, x) \le S^h(t, x, u_1^h(t,x), u_1^h(t, x+\Delta x), u_1^h(t, x-\Delta x)), \quad \forall\,(t,x) \in \mathcal{G}^h$$

et

$$u_2^h(t+\Delta t, x) \ge S^h(t, x, u_2^h(t,x), u_2^h(t, x+\Delta x), u_2^h(t, x-\Delta x)), \quad \forall\,(t,x) \in \mathcal{G}^h.$$

Si de plus, $u_1^h(0,x) \le u_2^h(0,x)$ pour tout $x \in \{i\Delta x,\, i \in \mathbb{Z}\}$ alors $u_1^h \le u_2^h$ sur $\mathcal{G}^h$.
4. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|u^h(t,x) - u_0(x)| \le Ct, \quad \forall\, h \in H,\ \forall\,(t,x) \in \mathcal{G}^h.$$

On dit que S^h est un *schéma numérique stable.*
5. On introduit $\overline{u}(t,x) = \overline{\lim}^*_{h\to 0,\, h\in H} u^h(t,x)$ et $\underline{u}(t,x) = \underline{\lim}_{*\,h\to 0,\, h\in H} u^h(t,x)$.
a) Montrer que $\overline{u}$ et $\underline{u}$ sont finies.
b) Montrer que $\overline{u}$ (resp. $\underline{u}$) est une sous-solution (resp. sur-solution) de $\partial_t u - c(x)\,|\partial_x u| = 0$ sur $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}$.
c) Montrer que u^h converge localement uniformément vers u, l'unique solution de viscosité de (2) sur $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}$.
6. Dans cette question, on suppose que c est constante égale à $c_0 > 0$.
a) Soit $T > 0$. On note

$$\mathcal{G}_T^h = \{(n\Delta t, i\Delta x),\, n \in \mathbb{N},\, i \in \mathbb{Z}\} \cap ([0, T[\times \mathbb{R}).$$

Pour $\sigma > 0$, on pose

$$M_\sigma = \sup_{\substack{(t,x)\in\mathcal{G}_T^h \\ (s,y)\in[0,T)\times\mathbb{R}}} \left(u^h(t,x) - u(s,y) - \frac{\sigma}{T-t} - \frac{(t-s)^2}{2\nu} - \frac{(x-y)^2}{2\varepsilon} - \alpha y^2 \right).$$

avec $\nu > 0$, $\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$.
Montrer que M_σ est fini et est atteint en un point

$$((t^h, x^h), (\bar{s}, \bar{y})) \in \Big(\big([0, T_0] \times \overline{B}(0,R) \big) \cap \mathcal{G}_T^h \Big) \times ([0,T] \times \mathbb{R})$$

où $T_0 < T$ et $R > 0$.
b) Montrer que si $M_\sigma \geq 0$ pour tout $\sigma \geq 0$, il existe $\sigma_* > 0$ tel que pour $\sigma > \sigma_*$, $t^h = 0$ ou $\bar{s} = 0$.
[Indication : écrire une inégalité de viscosité discrète et une continue.]
c) Prouver l'estimation d'erreur suivante : il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|u(t,x) - u^h(t,x)| \leq C\sqrt{\Delta x}, \quad \forall\, (t,x) \in \mathcal{G}^h.$$