TD n°7 : Théorème de De Giorgi

Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul et on note B_r la boule de $\mathbb{R}^n$ centrée en 0 et de rayon $r > 0$.

Exercice 1 : injections de Sobolev

Soit $s \in [0, n/2[$. On note $q := 2n/(n-2s)$ et on rappelle les notations suivantes :

$$\|f\|_{\dot{H}^s} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} \, |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \|f\|_{H^s} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s \, |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi \right)^{1/2}$$

De la question 1. à la question 4., on considère $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\|f\|_{\dot{H}^s} = 1$.

1. Montrer que pour tout $\lambda > 0$,

$$\|f\|_{L^q}^q = q \int_0^{+\infty} \lambda^{q-1} \, |\{|f| > \lambda\}| \, d\lambda,$$

où $\{|f| > \lambda\}$ est l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |f(x)| > \lambda\}$ et $|\{|f| > \lambda\}|$ la mesure de Lebesgue de cet ensemble.

2. Soit $A_\lambda > 0$ une constante qui dépend de λ. Pour tout $\lambda > 0$, on décompose f sous la forme $f = g_\lambda + h_\lambda$ (décomposition des hautes et basses fréquences) où g_λ et h_λ sont définies par :

$$\begin{array}{llll} \widehat{g_\lambda}(\xi) = \widehat{f}(\xi) & \text{si} \quad |\xi| \le A_\lambda, & \widehat{g_\lambda}(\xi) = 0 & \text{si} \quad |\xi| > A_\lambda \\ \widehat{h_\lambda}(\xi) = 0 & \text{si} \quad |\xi| \le A_\lambda, & \widehat{h_\lambda}(\xi) = \widehat{f}(\xi) & \text{si} \quad |\xi| > A_\lambda. \end{array}$$

Déterminer A_λ de sorte que $\{|g_\lambda| > \lambda/2\} = \emptyset$.

[Indication : on pourra montrer que $\|g_\lambda\|_\infty \le C_1(s,n) A_\lambda^{\frac{n}{2}-s} \|f\|_{\dot{H}^s}$ où $C_1(s,n)$ est une constante strictement positive dépendant uniquement de n et de s.]

3. Pour le A_λ défini à la question précédente, montrer que

$$\|f\|_{L^q}^q \le 4q \int_0^{+\infty} \lambda^{q-3} \, \|h_\lambda\|_2^2 \, d\lambda.$$

4. Montrer que

$$\|f\|_{L^q} \le C \, \|f\|_{\dot{H}^s}$$

où C est une constante positive.

5. Montrer que l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ s'injecte continûment dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour tout p tel que $2 \le p \le 2n/(n-2s)$.

6. Soit $p > 2$ et $s \ge s_p := n(1/2 - 1/p)$. Prouver qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $f \in H^s$,

$$\|f\|_{L^p} \le C \, \|f\|_{L^2}^{1-\theta} \, \|f\|_{\dot{H}^s}^\theta \quad \text{avec} \quad \theta = s_p/s.$$

Exercice 2 : espaces de Sobolev sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Soit Ω un ouvert borné à bord régulier de $\mathbb{R}^n$. On rappelle que

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \exists\, g_i \in L^2(\Omega), \int_\Omega u \, \partial_i \phi = -\int_\Omega g_i \, \phi, \, \forall\, \phi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega), \, \forall\, i = 1, \dots, n \right\}$$

et que $H_0^1(\Omega)$ est l'adhérence de $\mathcal{C}_0^1(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. On rappelle également que si $u \in H^1(\Omega)$, il existe une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que la suite $(u_{k|\Omega})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers u dans $H^1(\Omega)$.

1. Soit $u \in H^1(\Omega)$ et $v \in \mathcal{C}_b^1(\Omega)$ (c'est-à-dire que v et ses dérivées sont bornées sur Ω). Montrer que $uv \in H^1(\Omega)$ et les dérivées au sens faibles vérifient

$$\partial_j(uv) = (\partial_j u)v + u(\partial_j v), \quad \forall\, j = 1, \ldots, n.$$

2. Montrer que si $u \in H^1(\Omega)$ et $\eta \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$ alors $\eta u \in H_0^1(\Omega)$.

3. Soit $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction à dérivée bornée. Montrer que si $u \in H^1(\Omega)$ alors $G \circ u \in H^1(\Omega)$ et que les dérivées au sens faible vérifient

$$\partial_j(G \circ u) = (G' \circ u)\partial_j u, \quad \forall\, j = 1, \ldots, n.$$

Exercice 3 : inégalité de Caccioppoli pour les sous-solutions

Soit $r > 0$. On considère une matrice $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ symétrique dont les coefficients a_{ij} sont des fonctions mesurables réelles définies sur B_r vérifiant la condition d'ellipticité suivante :

$$\lambda|\xi|^2 \le A(x)\xi \cdot \xi, \quad \forall\, (x, \xi) \in B_r \times \mathbb{R}^n$$

ainsi que la condition :

$$\sup_{1\le i,j\le n} \|a_{ij}\|_{L^\infty(B_r)} \le \Lambda$$

pour des constantes λ et Λ strictement positives. On introduit l'opérateur L d'ordre deux défini par

$$Lu = \mathrm{div}(A\nabla u).$$

Une sous-solution faible de l'équation $Lu = 0$ dans B_r est une fonction $u \in H^1(B_r)$ vérifiant

$$\int_{B_r} A\nabla u \cdot \nabla\varphi \le 0, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{C}_0^1(B_r),\ \varphi \ge 0.$$

Une solution faible de l'équation $Lu = 0$ dans B_r est une fonction $u \in H^1(B_r)$ vérifiant

$$\int_{B_r} A\nabla u \cdot \nabla\varphi = 0, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{C}_0^1(B_r).$$

1. a) Soient u une sous-solution positive de $Lu = 0$ sur B_r et $\psi \in \mathcal{C}_0^1(B_r)$. Montrer que

$$\int_{B_r} |\nabla(\psi u)|^2 \le C\|\nabla\psi\|_{L^\infty}^2 \int_{\mathrm{supp}\,\psi} u^2$$

où $C > 0$ est une constante dépendant uniquement de λ, Λ et n.
[Indication : on pourra considérer $\psi^2 u$ comme fonction test.]
b) Soit ω un ouvert strictement inclus dans B_r. Montrer que si u une sous-solution faible positive de $Lu = 0$ dans B_r, alors, on a :

$$\int_\omega |\nabla u|^2 \le C \int_{B_r} u^2$$

où $C > 0$ est une constante dépendant uniquement de λ, Λ et n.
2. a) Soit $\Phi : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ une fonction convexe, croissante de classe $\mathcal{C}^2$ telle que Φ' et Φ'' sont bornées. Montrer que si u est une sous-solution faible de $Lu = 0$ sur B_r alors $\Phi(u)$ l'est également.
b) On considère $u \in H^1(B_r)$ une sous-solution faible de $Lu = 0$ sur B_r. On considère un ouvert ω strictement inclus dans B_r. Montrer que $u_+ \in H^1(\omega)$ et u_+ est une sous-solution faible positive de $Lu = 0$ dans ω.

Exercice 4 : estimation $L^2 - L^\infty$

Dans cet exercice, la dimension n est supérieure ou égale à 3. On considère une matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ symétrique dont les coefficients a_{ij} sont des fonctions mesurables réelles définies sur B_1 vérifiant la condition d'ellipticité suivante :

$$\lambda|\xi|^2 \leq A(x)\xi \cdot \xi, \quad \forall\,(x,\xi) \in B_1 \times \mathbb{R}^n$$

ainsi que la condition :

$$\sup_{1\leq i,j\leq n} \|a_{ij}\|_{L^\infty(B_1)} \leq \Lambda$$

pour des constantes λ et Λ strictement positives. On introduit l'opérateur L d'ordre deux défini par

$$Lu = \operatorname{div}(A\nabla u).$$

Dans la suite de l'exercice on note $a_+ = \sup(0, a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et on considère $u \in H^1(B_1)$ une solution faible de $Lu = 0$ dans B_1.
1. On introduit une famille de boules $(\tilde{B}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ centrées en 0 et de rayon $(1 + 2^{-k})/2$. On remarque que $\tilde{B}_0 = B_1$ et $\tilde{B}_k$ "converge" vers $B_{1/2}$ lorsque $k \to +\infty$. On considère ensuite une suite $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de "niveaux d'énergie" définie par $C_k = (1 - 2^{-k})/2$ (allant de 0 à 1/2).
On définit la suite d'énergies au dessus du niveau C_k dans la boule $\tilde{B}_k$:

$$U_k = \int_{\tilde{B}_k} |u_k(x)|^2\,dx \quad \text{où} \quad u_k = (u - C_k)_+.$$

a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, u_{k+1} est une sous-solution faible de $Lu = 0$ sur $\tilde{B}_k$.
b) Pour $k \in \mathbb{N}$, on introduit les fonctions de troncature $\phi_{k+1} \in \mathcal{C}^1_0(\tilde{B}_k)$ comprises entre 0 et 1, vérifiant

$$\begin{cases} \phi_{k+1} = 1 & \text{sur} \quad \tilde{B}_{k+1} \\ \phi_{k+1} = 0 & \text{sur} \quad \tilde{B}_k^c \end{cases}$$

et satisfaisant pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|\nabla\phi_{k+1}| \leq c_0 2^{k+1}$ pour une certaine constante fixée $c_0 > 0$. Montrer que pour tout $k \geq 1$,

$$\|\phi_{k+1}u_{k+1}\|^2_{L^p} \leq C^k U_k \quad \text{avec} \quad p = \frac{2n}{n-2}$$

où C est une constante strictement supérieure à 1.
c) Prouver qu'il existe des constantes $C > 1$ (éventuellement différente de celle de la question précédente) et $\beta > 1$ telles que pour tout $k \geq 2$,

$$U_{k+1} \leq C^k U_k^\beta.$$

[Indication : on pourra montrer que si $\phi_{k+1}(x)u_{k+1}(x) > 0$ alors $\mathbb{1}_{\tilde{B}_k}(x)u_k(x) > 2^{-k-2}$.]

2. Montrer que si U_0 est assez petit, on a pour tout $k \geq 2$:

$$C^k U_k^{\beta-1} \leq \frac{1}{(2C)^{\frac{1}{\beta-1}}}$$

où C est la constante de la question 1.c).

3. Montrer qu'il existe une constante δ dépendant uniquement de λ, Λ et n telle que pour toute solution faible u de $Lu = 0$ dans B_1, on a :

$$\|u_+\|_{L^2(B_1)} \leq \delta \Rightarrow \|u\|_{L^\infty(B_{1/2})} \leq 1/2.$$