TD n°8 : Théorème de De Giorgi et inégalité de Harnack

Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul et on note B_r la boule de $\mathbb{R}^n$ centrée en 0 et de rayon $r > 0$.

Exercice 1 : lemme des valeurs intermédiaires

On considère $u \in H^1(B_1)$ et on introduit une constante $c_0 > 0$ telle que

$$\int_{B_1} |\nabla u|^2 \leq c_0.$$

On définit :

$$A = u^{-1}(]-\infty; 0]), \quad C = u^{-1}(]0; 1[), \quad D = u^{-1}([1; +\infty[).$$

1. On pose $\bar{u} = \sup(0, \inf(u, 1))$. Soit $x_0 \in A$. On rappelle que $\nabla \bar{u} = (\nabla u)\, \mathbb{1}_{0<u<1}$ presque partout, montrer que :

$$|D| \leq \int_{B_1} \int_0^1 |\nabla \bar{u}((1-t)x_0 + tx)|\, |x - x_0| dt\, dx.$$

2. Montrer que :

$$|D| \leq c_n \int_{B_1} \frac{|\nabla \bar{u}(y)|}{|x_0 - y|^{n-1}} dy$$

puis que

$$|A||D| \leq c_n \int_{B_1} |\nabla \bar{u}|(y) \left(\int_A \frac{dx}{|x-y|^{n-1}} \right) dy$$

pour une constante $c_n > 0$ ne dépendant que de la dimension n.

3. Montrer qu'il existe $c'_n > 0$ tel que, pour tout $x \in B_1$ et tout $E \subset B_1$:

$$\int_E \frac{dy}{|x-y|^{n-1}} \leq c'_n |E|^{1/n}.$$

4. Montrer qu'il existe $c''_n > 0$ tel que

$$c_0 |C| \geq c''_n \left(|D||A|^{1-1/n} \right)^2.$$

Exercice 2 : lemme d'oscillation et théorème de De Giorgi

On considère une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ symétrique dont les coefficients a_{ij} sont des fonctions mesurables réelles définies sur B_2 vérifiant la condition d'ellipticité suivante :

$$\lambda |\xi|^2 \leq A(x)\xi \cdot \xi, \quad \forall\, (x, \xi) \in B_2 \times \mathbb{R}^n$$

ainsi que la condition :

$$\sup_{1 \leq i,j \leq n} \|a_{ij}\|_{L^\infty(B_2)} \leq \Lambda$$

pour des constantes λ et Λ strictement positives. On introduit l'opérateur L d'ordre deux défini par

$$Lu = \mathrm{div}(A\nabla u).$$

Soient $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ et $\rho > 0$ tels que $\overline{B(x_0, r)} \subset B(x_0, \rho) \subset B_2$. On remarque qu'en adaptant les preuves des exercices 3 et 4 du TD 7, on peut montrer qu'il existe $c > 0$ tel que, pour toute sous-solution faible positive $w \in H^1(B_2)$ de $Lw = 0$:

$$\sup_{B(x_0,r)} w \leq c \left(\int_{B(x_0,\rho)} w^2 \right)^{1/2},$$

$$\left(\int_{B(x_0,r)} |\nabla w|^2 \right)^{1/2} \leq c \left(\int_{B(x_0,\rho)} w^2 \right)^{1/2}.$$

1. Soit $v \in H^1(B_{3/2})$ une sous-solution faible de $Lv = 0$. On suppose $0 \leq v \leq 1$ et on suppose que $\mu = |B_1 \cap v^{-1}(\{0\})| > 0$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $v_k = 2^k \max(0, v - (1 - 2^{-k}))$.
a) Montrer qu'il existe une constante $c_0 > 0$ indépendante de v telle que, pour tout k :

$$\int_{B_1} |\nabla v_k|^2 \leq c_0.$$

b) On pose $w_k = 2\min(v_k, 1/2)$ et on définit

$$A_k = w_k^{-1}(]-\infty; 0]) \cap B_1, \quad C_k = w_k^{-1}(]0; 1[) \cap B_1, \quad D_k = w_k^{-1}([1; +\infty[) \cap B_1.$$

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$|\{x \in B_1 \text{ tq } v_k(x) > 0, v_{k+1}(x) = 0\}| \geq c_1 \, |\{x \in B_1 \text{ tq } v_{k+1}(x) > 0\}|^2$$

où c_1 est une constante qui ne dépend que de n, μ et c_0.
[Indication : on pourra commencer par montrer que $C_k \subset \{x \in B_1 \text{ tq } v_k(x) > 0, v_{k+1}(x) = 0\}$ puis utiliser l'exercice 1.]
c) Montrer que, pour tout $\delta > 0$, il existe k_0 ne dépendant que de n, μ, δ et c_0 tel que :

$$|\{x \in B_1 \text{ tq } v_{k_0}(x) > 0\}| \leq \delta.$$

d) En déduire qu'il existe $\eta \in]0; 1[$ ne dépendant pas de v tel que :

$$\sup_{B_{1/2}} v \leq \eta.$$

[Indication : utiliser le fait que $\int_{B_1} v_{k_0}^2 \leq |\{x \in B_1 \text{ tq } v_{k_0}(x) > 0\}|$.]
2. On suppose que $u \in H^1(B_2)$ est une solution faible de $Lu = 0$.
a) [Lemme d'oscillation]
Montrer qu'il existe une constante $\theta \in]0; 1[$ indépendante de u telle que, pour tout $x_0 \in B_1$ et tout $r > 0$ tel que $B(x_0, 4r) \subset B_2$, alors :

$$\operatorname*{osc}_{B(x_0,r)} u \leq \theta \operatorname*{osc}_{B(x_0,2r)} u.$$

b) [Théorème de De Giorgi]
Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ indépendant de u tel que u est α-Hölder sur B_1.

Exercice 3 : inégalité de Harnack faible et régularité Hölderienne

Soient λ, $\Lambda > 0$, $\mathcal{P}^+$ et $\mathcal{P}^-$ les opérateurs de Pucci associés. On considère $f : \bar{B}_2 \to \mathbb{R}$ continue et $u : \bar{B}_2 \to \mathbb{R}$ continue positive une sur-solution de

$$\mathcal{P}^+(D^2u) + |f| = 0 \quad \text{dans} \quad B_2.$$

Alors, d'après le cours, on a l'existence de constantes universelles ε et C telles que l'inégalité de Harnack faible suivante est vérifiée :

$$\left(\int_{B_1} u^\varepsilon\right)^{1/\varepsilon} \leq C\left(\inf_{B_1} u + \|f\|_{L^n(B_2)}\right).$$

On suppose également que u est une sous-solution de

$$\mathcal{P}^-(D^2u) - |f| = 0 \quad \text{dans} \quad B_2.$$

1. Montrer qu'il existe des constantes universelles $\theta \in]0,1[$ et $\varepsilon_0 > 0$ telles que

$$\operatorname*{osc}_{B_1} u \leq \theta\left(\operatorname*{osc}_{B_2} u + \frac{\|f\|_{L^n(B_2)}}{\varepsilon_0}\right).$$

2. Montrer que u est Hölderienne sur B_1.